非定常運動の境界条件について

近畿大学　正員　伊藤　剛

1，発想のもと

波動，不定流等非定常運動の数値解析は，適切な境界条件の設定が不可欠である。たとえば，外洋に発生した高潮や津波が陸岸におしよせる場合を考えると，沖合の適当なところに境界条件を設定できないとすれば，無限の遠方すなわち，太平洋をわたったアメリカまで計算をつづけることになる。

河川の不定流にしても，下流適当なところで境界条件を設定できないと，河口まで計算をつづけることになり，多大の経費と労力，時間の浪費となる。短い日本の河川ならば兎に角，外地河川では上下流必らずしも同一国家とは限らず，データーすら得られないことがある。

上述のように，任意河川地点，外洋地点で境界条件を設定することは，極めて必要度がたかく，実務にたずさわっている人々は，痛切にこのことを経験している。

著者はこのような理由で，この研究を始めた次第である。結果として，水理学的にみて不適当なところは避けて，ある適当な点をきめ，そこで連続方程式と運動方程式をくみ合わせれば，その点で境界条件をたて得ることを知った。差分式に直おして数値解析をする段階で，精度のよい，しかも安定かつ収束性のすぐれた式を如何にして組みたてるか，それがこの問題の key point である。

2，既に知られている，境界条件の設定方法

2−1，ダムの地震動で誘発された貯水池の水圧振動

この問題は電力中央研究所の中川友康主査研究員が適切な境界条件設定に成功した。1)

アーチダムが地震動をすると，それが貯水池の水に連動され，圧力波が貯水池を溯ってゆく。上流端まで計算することはこの場合必要なく，第一上流端では連続的に河川流路に移ってゆくので，境界条件をみつけにくい。彼は次のような境界条件を設定した。

a) 貯水池を溯る動水圧は，水深の数倍のところまで溯ると平面波になっていると考えて差支えない。

b) 平面波となったところでは，次の(1)式が成立する。

(1) $$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad 但し\ c_0 = 波速 = \sqrt{\frac{Kg}{\gamma}}$$

ここに K：水の体積弾性率

γ：水の単位重量

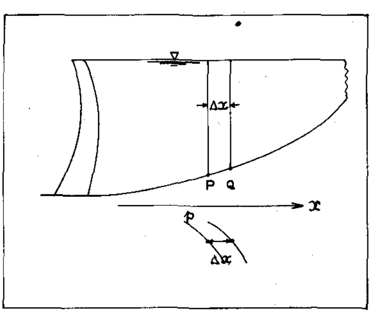

Fig. 1　ダムと貯水池の地震動

(1)式を差分式で表わすと，Fig. 1を参照して次の(2)式が得られる。

(2) $$p_Q^{n+1} = p_P^{n+1-k}$$

この式の意味は，Q点の$(n+1)\Delta t$時刻のときの動水圧は，Δxだけへだたった下流の点Pの$(n+1-k)\Delta t$時刻の動水圧に等しいということを表わす。(2)式がP点を境界点とした場合の境界条件を示す。

この境界条件をつかって動水圧の変動を求めると，圧力波はきれいに上流に通過し，P点での反射の現象は認められなかった。このことは設定された境界条件が適切であることを示すものと考えてよかろう。

2－2，津波の場合（沖側）

高潮の解析では沖側の境界条件の設定は容易である。境界点における潮位上昇は気圧の低下量に見合うとおけばよい。ある程度外洋にとればこの条件が成立する。

津浪の場合はそうはゆかない。（2－1）の例のような適当な水理学的条件をみつける必要がある。東京工業大学の日野教授は次の条件式を提示した。

(3)　v＝水粒子の速度，h＝水面上昇高，H＝水深とするとき

$$v = h\sqrt{g/H}$$

この条件をつかって，電力中央研究所で数値解析をしたところ，津浪はきれいに境界点を通過し，なんら反射の現象が認められなかった。これによりやはりこの境界条件は適切であると考えてよかろう。

なお著者は次の条件式を数値解析によりチェックしつゝある。そして横方向は一様とした，2次元の場合に使うつもりでいる。

(4)　$h(t-\Delta t, P) = h(t, P+c\Delta t)$，　$c=\sqrt{gh}$

この条件式は，P点の$(t-\Delta t)$時における潮位は，$P+c\Delta t$点のt時の潮位に等しいという条件を示している。

(4)式は3次元の場合は方向を考える必要があり，一寸複雑になる。

2－3，津浪の場合（岸側）

これはまだ未完成の問題である。津浪が沖からおしよせてきて，陸に近づくと或いは砕波となり，或いはそのまゝ陸岸を匍い上る現象を，津浪発生点から一連の問題として計算しようと試みている。いまのところ，長波と認められる範囲内の地点に境界点を設け，沖からきた津浪は一部陸に向い，一部左右にわかれるとし，その割合（陸に向うものと左右にわかれるものとの）はあらかじめきめておく。このようにして境界点の潮位，流速等を求め，その値をつかって陸岸に向かう津浪の計算をスタートさせる。

境界点から陸に匍上るまでの解析は，京都大学の岩垣教授の提唱している理論2）にもとづき，2次元でFreeman-Méhautéの方法等により特有曲線法をつかう。

この問題を一連の問題として解析できれば，岸側の境界点は設ける必要がなくなり，精度が向上するであろう。

3，河川の非定常運動における境界条件

3－1，河川の合流点

河川の合流点の場合，こゝに境界条件をいれるというが，こゝで計算を打切るわけではないので，数値計算上容易である。何となれば，不定流の差分式による数値解析は，非線形双曲形2次偏微分方程式の差分解であるから，安定性，收束性に苦労する。ゆえにいままで経験的に確かめられてい

差分式を，或はそれに類形の差分式を使うのが有利である。

一般に放物形や双曲形の方程式を差分化して解く場合，中心差分を使うと安定性がよい。すなわち，Fig.2で$_{n+1}A_j$の値を求める場合，$(j-1)$と$(j+1)$両点の値を使うことになる。例えば連続式の差分式として次のFriedrichs形の式を使うと，精度は1であるが，$\mu<1$で安定である。

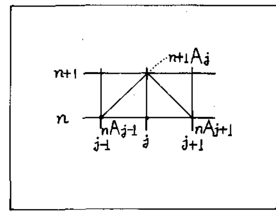

Fig. 2 Friedrich's 差分スキーム

(5) $_{n+1}A_j=({}_nA_{j+1}-{}_nA_{j-1})/2-\mu({}_nQ_{j+1}-{}_nQ_{j-1})/2$

ここに，$\mu=(\text{流速}+\sqrt{gh})\Delta t/\Delta x$，$A$は断面積，$Q$は流量とする。

合流点では上下流端の境界点とちがって$(j+1)$点が存在しているから，このことが可能である。

著者の方法は，実際の合流点jおよびi（Fig.3）から，1 step長（Δx）だけ下流に仮想の壁を考え，そこで次に示す水位，流量等の条件を与えることとする。大きい支川が合流する場合，この方法が従来のものより実状に近い。

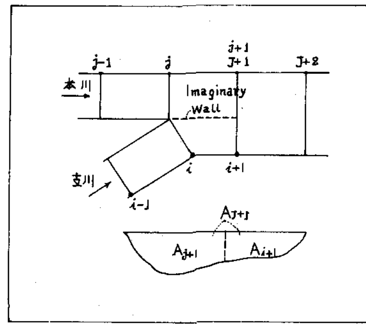

Fig. 3 合 流 点

従来の方法は，1 stepの長さにわたり，すなわちjから$j+1$点の間に均等に支流の流量が，降雨の如く注ぎこむと考えている。

表—1　合流点の条件

	本川		支川		合流点
水位	$Z(j+1)$	$=$	$Z(i+1)$	$=$	$Z(J+1)$
断面積	$A(j+1)$	$+$	$A(i+1)$	$=$	$A(J+1)$
径深	$R(j+1)$	$=$	$R(i+1)$	$=$	$R(J+1)$
流量	$Q(j+1)$	$+$	$Q(i+1)$	$=$	$Q(J+1)$
水深	$h(j+1)$	$=$	$h(i+1)$	$=$	$h(J+1)$
流速	$u(j+1)$	$=$	$u(i+1)$	$=$	$u(J+1)$

差分式として本川側，支川側に表—2のような各式が成立する。

表—2　合流点の条件式

（但し$g\lambda i=g\times\frac{\Delta t}{\Delta x}\times$河床勾配，$n_{j+1}^2$：$j+1$点の(粗度係数)^2）

(6) $_{n+1}u_{j+1}=({}_nu_{J+2}+{}_nu_j)/2-\frac{\lambda}{2}({}_nu_{J+2}^2/2+g\,{}_nh_{J+2}-{}_nu_j^2/2-g\,{}_nh_j)+g\lambda i-g\Delta t\,n_j^2\,|{}_{n+1}u_{j+1}|\,{}_nu_{j+1}/{}_{n+1}R_{j+1}^{(4/3)}$

(7) $_{n+1}A_{j+1}={}_nA_{j+1}-{}_{n+1}A_j+{}_nA_j-\lambda({}_{n+1}Q_{j+1}-{}_{n+1}Q_{j-1}+{}_nQ_{j+1}-{}_nQ_j)$

(8) $_{n+1}Q_{j+1}={}_{n+1}u_{j+1}\cdot{}_{n+1}A_{j+1}$

同様な式が支川でもなりたち，$_{n+1}u_{i+1}$，$_{n+1}A_{i+1}$，$_{n+1}Q_{i+1}$が求められる。

(9) $_{n+1}Q_{J+1}={}_{n+1}Q_{j+1}+{}_{n+1}Q_{i+1}$

(10) $_{n+1}A_{J+1}={}_{n+1}A_{j+1}+{}_{n+1}A_{i+1}$

(11) $_{n+1}h_{J+1}={}_{n+1}h_{j+1}={}_{n+1}h_{i+1}$

(12) $_{n+1}u_{J+1}={}_{n+1}u_{j+1}={}_{n+1}u_{i+1}$

(6),(7) 式には右辺にも未知数 ${}_{n+1}R_{j+1}$, ${}_{n+1}Q_{j+1}$ が含まれているので，この差分式は implicit（陰形）であり，Iteration で解くことになる。 なお上記の式で運動方程式では合流点 $j+1$（又は $J+1$）を挟んで上下流すなわち j と $J+2$ 点の値を使って安定性をよくしている。 連続式ではこのことが不可能なので後進差分を使っている。 さらに(6) 式運動方程式の右辺最終の摩擦項に速度 u に $(n+1)$ 時点と n 時点の両方の値を使っているが，これは Vasiliev の理論4) に従ったものである。

計算結果は slide で示すが，滑らかな安定解を得ている。

3−2，河川の任意地点に境界点を設ける場合

河川であるから，流量，流速，断面積は当然下流の影響をうける。故に任意地点といっても，直下流に大きな支川が合流したり，堰があったりするところは避けて，なる可く河道が均一のところを選ぶべきである。また下流の影響をうけやすい勾配のゆるいところも不適当である。 そして安定性の確かめられている差分式を使えないので，implicit 形にして，Iteration を活用する必要がある。

著者の使った差分式は次のような式である。

こゝに，n step までの値全部と，j 点から上流の点の値が $(n+1)$ step までもとめられているとき，$(n+1)$ step，$(j+1)$ 地点（境界点）の値を求める境界条件式をかいてみる。 まず

${}_{n+1}Q_{j+1}={}_{n}Q_{j+1}$ 或いは $={}_{n+1}Q_{j}$ とおいて第一近似値とし，以下 Iteration を繰返えす。

(13) ${}_{n+1}A_{j+1}={}_{n}A_{j+1}-{}_{n+1}A_{j}+{}_{n}A_{j}-\lambda({}_{n+1}Q_{j+1}+{}_{n}Q_{j+1}-{}_{n+1}Q_{j}+{}_{n}Q_{j})$

(14) A より ${}_{n+1}H_{j+1}$, ${}_{n+1}R_{j+1}$ を求める。

(15) $${}_{n+1}u_{j+1}={}_{n}u_{j}-\lambda({}_{n}u^{2}_{j+1}-{}_{n}u^{2}_{j})/2-g\lambda({}_{n}h_{j+1}-{}_{n}h_{j})+g\lambda i-\{({}_{n+1}u_{j}\cdot{}_{n}u_{j}\cdot g\Delta t\,n^{2}_{j})/{}_{n}R^{4/3}_{j}+({}_{n+1}u_{j+1}\cdot{}_{n}u_{j+1}\cdot g\Delta t\,n^{2}_{j+1})/{}_{n+1}R^{4/3}_{j+1}\}/2$$

(16) ${}_{n+1}Q_{j+1}={}_{n+1}A_{j+1}\cdot{}_{n+1}u_{j+1}$

(13) 式に戻る。

こゝにも摩擦（項）に Vasiliev の安定条件を入れてある。

この式を使って，反射現象のない，きれいな波形を求めることができた。その結果は slide で示す。

4，結論と謝辞

任意地に境界条件を設定するといっても，特別な条件をもってくるわけではない。 たゞ連続式と運動方程式を適当な差分式に直おし，境界点の値を求めればよい。 問題は精度がよくて，しかも安定性のある差分方程式を試行錯誤で求めるより他はない。 (15) 式の時間 step のところに多少異様なところがみえる。すなわちエネルギー項が n step で摩擦項が $(n+1)$ step の値を使っている。 これらの点は安定性のためにこうしたもので，何回も失敗したのち漸やくきまった形である。

なお，今回の計算は河川に関する限りいわゆる smoothing は行わなかった。それは計算時間の節約と，境界点との結びつきのところで不安定となる場合があるからである。 従って境界点以外の計算では，値の凸凹が生ずるが，それをきれいに平滑化する方法をはからずも見つけることができた。

次の機会があったとき発表したいと思う。

上記の研究は，途上において多くの方々に非常な援助と指導を載いた。 京都大学理学部山口昌哉

博士，全工学部野木達夫博士，京都産業大学藤井宏博士，新潟大学工学部渡辺琢助手，電力中央研究所情報処理研究センターの各位に謝意を表したい．

5．記号と文けん

p：水圧．　v：水粒子速度　h：潮位上昇高又は河川水深　H：海洋の平均潮位のときの水深　z：河川水位　A：河川断面積　Q：河川の流量　R：径深　u：河川の平均流速　i：河床勾配　n_j：j点の粗度係数　$\Delta t, \Delta x$：時間および距離メッシュの単位長（秒又は米）　${}^{n+1}A_{j+1}$：$(n+1)$~~時~~Δt時間stepにおける，$(j+1)\Delta x$点の断面積
λ：$\Delta t/\Delta x$

文けん：

1) 電力中央研究所研究報告 7103, NO.11（47年3月）連立線形偏微分方程式混合問題の差分解
2) 土木学会水理委員会（1963年7月）　海岸堤防論　岩垣雄一
3) 数値解析の応用と基礎　アテネ出版，伊藤　剛編（46年10月）
4) Doclady（ロシアの物理学雑誌）Vol 8, NO.7 (1963)　Numerical Method for Calculation ~~for~~ the Propagation of Linear Waves in Open Channels, O.F. Vasiliev