

神戸大学工学部 正 員 寛 源亮

神戸大学大学院 学生員○小林六郎

1 要 旨

この研究は、従来から著者らが行なっている砂礫粒子の初期移動に関する水路実験の指針を得ることを目的とし、試行錯誤的に行なって得た数値実験の結果の中同一範疇に入る資料を整理したものである。従って、円柱周辺の流れの数値解法に新手法を導入するものでもなければ、計算領域を高レイノルズ数にまで拡大したものでもない。初期条件・境界条件が既に発表されている研究と異なっているにすぎない。

この数値実験は、低レイノルズ数領域であるために、得られた結果を直ちに水路実験の結果と結びつける事はできないが、実際には、試行錯誤的に行なった数値実験の結果より、水路実験を実施する場合の指針を得ている。

2 数値解析

現在までに、円柱まわりの流れを数値計算により求めた研究は数多く報告されている。例えば、Kawaguti は $Re = 40$ での定常流解を求め、Takami-Keller は $Re = 1 \sim 60$ における定常流解を求めている。これらはいずれも無限遠での境界条件に、Imai の漸近解を用いている。非定常流に関するものとしては、急に動き始める流体中の円柱のまわりの流れの解析として、Payne が $Re = 40, 100$ で、Jain と Rao¹⁾ が $Re = 40, 60, 100, 200$ で、Thoman と Szewzyk が $Re = 1 \sim 3 \times 10^5$ で行なったものなどがある。広田と都田は、直角座標を用いて計算し、Fromm²⁾ らは角柱まわりの流れを計算して、いずれも後流に発生するカルマン渦列の様相を示している。日野²⁾ らは、 $Re = 0.2, 100$ で、振動流中の円柱まわりの流れを計算し、岡島³⁾ らは、 $Re = 40$ で、角振動する円柱まわりの流れ、及び、並進振動する円柱のまわりの流れの計算を行なっている。

本論文では、セン断流及び一様流に振動流を上乗せした流れの中の円柱まわりの流れから揚力、抵抗力を計算し、河床上の砂礫粒子の移動の機構に対する考察を試みた。

3 基礎方程式

流れは二次元で、非圧縮性流体であると仮定する。極座標 (r, θ) による無次元化した Helmholtz の渦度方程式は次のとおりである。

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\Psi, \zeta)}{\partial (r, \theta)} = -\frac{2}{Re} \Delta \zeta \quad (1)$$

$$\text{但し } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

ここで $Re = dU/\nu$ 、 d は円柱の直径、 U は無限遠での流れの平均流速、 ν は流体の動粘性係数である。流れ関数 Ψ 、渦度 ζ 、及び、 (r, θ) 方向の速度成分 (u, v) の間には次の関係がある。

$$\zeta = -\Delta \Psi \quad (2)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3)$$

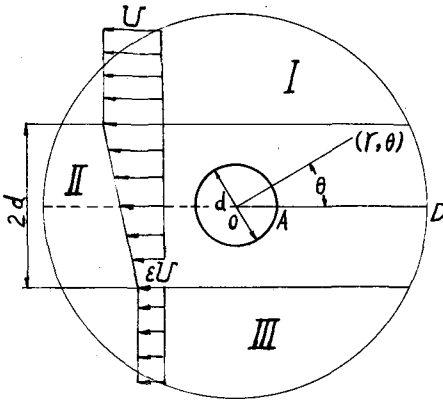
流れの変化の激しい円柱近傍における計算の精度を上げるために、 $\xi = \ln r$ の変換を行ない、 $\Psi = \Psi_b + \psi$ (ここで Ψ_b は、主要流れを表わす流れ関数、 ψ は Ψ_b からの変動分を表わす) とすれば、式(1)及び式(2)は、次のようになる。

$$-\exp(2\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial(\psi, \xi)}{\partial(\xi, \theta)} + \frac{\partial(\Psi_b, \xi)}{\partial(\xi, \theta)} + \frac{2}{Re} \Delta \xi = 0 \quad (4)$$

$$\xi = -\exp(-2\xi) \Delta \psi \quad (5)$$

$$\text{但し} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

3.1 セン断流の場合の基礎方程式 図-1に示すように、円柱まわりの領域を次の3つに分割する。



I) 円柱上方で、流速 U の一様流の領域

II) I) の領域から、円柱下方の流速 εU (但し $0 \leq \varepsilon \leq 1.0$) の一様流に至るセン断流の領域

III) 円柱下方で、流速 εU の一様流の領域

これら各域での流れを表わす流れ関数 Ψ_b は、次のようになる。

$$\text{領域 I ;} \quad \Psi_b = -r \sin \theta \quad (7)$$

$$\text{領域 II ;} \quad \Psi_b = -\frac{1+\varepsilon}{2} r \sin \theta - \frac{1-\varepsilon}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (8)$$

$$\text{領域 III ;} \quad \Psi_b = -\varepsilon r \sin \theta \quad (9)$$

図-1 セン断流中の円柱まわりの領域

3.2 振動流の場合の基礎方程式 流速 U をもつ一様流に、振動流成分 $A \sin 2\pi FT$ (ここで、 A は振動流速の振幅を表わし、 F は振動数、 T は経過時間をそれぞれ表わす) を上乗せした流れの場を考える。この場合の流れ関数は、次のようになり、この流れは乱流相似を試みたものである。

$$\Psi_b = (1 + a \sin 2\pi ft) \cdot U \quad (10)$$

ここで a は、実際の変動流速の振幅 A を U で割った無次元量であり、 f は実際の振動数 F を $U/2\pi d$ で割った無次元振動数、 t は実際の経過時間 T を $d/2U$ で割った無次元量である。

4 初期条件及び境界条件

4.1 セン断流の場合 静止している流体が、 $t \geq 0$ のときに式(7)~(9)で表わされる流れに急に動き始めると仮定しているので、初期条件は、 $t < 0$ のとき、全領域において $\Psi = \xi = 0$ となる。円柱表面上の境界条件としては、流れが物体表面に沿い、しかもすべりが無いとすればよいから、次のように書ける。

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{円柱表面上で}) \quad (11)$$

無限遠での境界条件は、 Ψ の変化分の影響が小さいとして、 $\psi = 0$ とおいた。渦度 ζ に対する無限遠での境界条件は、図-1に示す、領域 I、III においては、 $\zeta = 0$ とし、領域 II については、 $\zeta = (1 - \varepsilon)/4$ とした。

4.2 振動流の場合 初期条件及び、円柱表面での境界条件は、セン断流の場合と同じである。無限遠での境界条件は、 Ψ の変化が小さいとして、 $\psi = 0$ をとり、渦度 ζ は、 $\zeta = 0$ とした。

5 抗力・揚力の計算

前節で述べた初期条件・境界条件のもとで式(4), (5)を数値的に解いて得られた円柱のまわりの ψ , ζ の分布から、円柱に働く抗力及び揚力を次式によって計算する。

5.1 円柱表面の圧力分布 圧力の基準点として円柱後縁を採り、動圧 $(1/2)\rho U^2$ で無次元化すると、表面上の任意の点の圧力係数 C_p は、次式によって求められる。

$$C_p(\theta) - C_p(0)_{\text{後縁}} = \frac{4}{Re} \int_0^{\theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\theta \quad (12)$$

5.2 円柱表面のせん断応力分布 円柱表面上における粘性によって働くせん断力を $(1/2)\rho U^2$ で無次元化した粘性せん断力係数 $C_\tau(\theta)$ は、次式によって求められる。

$$C_\tau(\theta) = \frac{4}{Re} \left[\zeta \right]_{\xi=0} \quad (13)$$

5.3 円柱に働く揚力及び抵抗力 求められた円柱表面上の圧力分布 $C_p(\theta)$ 、及び粘性せん断力分布 $C_\tau(\theta)$ から、実際に、円柱に働く揚力 C_L 、抵抗力 C_D を次式によって求める事ができる。

$$\left. \begin{aligned} C_{Lp} &= -\oint C_p(\theta) \sin \theta d\theta \\ C_{Dp} &= -\oint C_p(\theta) \cos \theta d\theta \\ C_{L\tau} &= \oint C_\tau(\theta) \cos \theta d\theta \\ C_{D\tau} &= -\oint C_\tau(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

但し $\oint$ は、円柱表面に沿っての一周積分を表わす。

6 数値解法

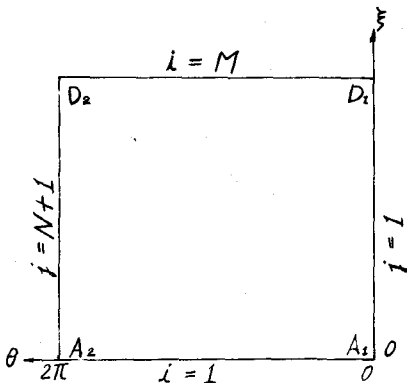


図-2 (ξ, θ) 座標平面

前述のように、数値解法上で都合のよいように、円柱まわりの領域を (ξ, θ) 座標面に変換する。そして変換された (ξ, θ) 座標面上において、図-2に示されるように θ 方向について1周を N 等分し、その格子番号を j とする。従って格子間隔は $h = 2\pi/N$ である。 ξ 方向にも格子間隔 h で分割し、格子番号を i とする。無限遠の境界として $i = M$ まで格子点をとる。

6.1 セン断流の場合 3.1節で述べた各領域ごとの基礎式を差分表示して、4.1節で述べた初期条件・境界条件のもとで、次の手法に従って解く。

(i) まず、 $t = 0$ のとき、円周上を除く全格子点で、 $\psi = 0$ 、領域I及びIIIで、 $\zeta = 0$ 、円周上を除く領域IIで、 $\zeta = (1-\epsilon)/4$ 、円周上で、 $\Psi = 0$ 、 $\zeta = 0$ とおく。

(ii) 差分表示した式(6)を successive over relaxation 法によって、 ψ について解く。この繰り返し計算は、全格子点において、 ψ の変化量の最大値が 10^{-5} より小さくなれば、収束したものと見なす。

収束を早めるために、実際の計算では次式を用いた。

$$\psi_{ij}^{(n+1)} = \psi_{ij}^{(n)} + K \left(\frac{\psi_{i+1,j}^* + \psi_{i-1,j}^* + \psi_{i,j+1}^* + \psi_{i,j-1}^*}{4} + \frac{h^2}{4} \exp[2(i-1)h] \zeta_{i,j} - \psi_{i,j}^{(n)} \right) \quad (15)$$

ここで、 K は緩和係数、添字 (n) 及び $(n+1)$ は、それぞれ n 回目及び $(n+1)$ 回目の計算値である事を示

す。また χ は、最も新しい値である事を示す。なお、緩和係数 K は、予備的な計算によって 1.6 とした。

Ⅲ) Ⅱ) で計算した ψ の値を用いて、円柱表面での渦度 ζ_{ij} を計算する。

Ⅳ) 各領域において、差分表示した式 (4) を用いて、 Δt 時間後の ζ の値を計算する。

Ⅴ) Ⅱ) の計算過程を、 Δt 時間後について行なう。

Ⅵ) Ⅲ) の計算過程を、 Δt 時間後について行なう。

以上で、 Δt 時間後の計算が完了した事になる。

Ⅶ) 必要であれば、得られた ψ 、 ζ の値により、式 02, 03, 04 によって、円柱表面上の圧力係数、粘性せん断力係数、揚力、抵抗力を計算する。

Ⅷ) 新しい時間ステップに対して、以下順次、その時刻の新しい境界条件の値を与え、Ⅱ)～Ⅶ) の計算過程を繰り返す。

6.2 振動流の場合 3.2 節で述べた基礎方程式を差分表示して、4.2 節で述べた初期条件・境界条件のもとで、せん断流の場合と同様の手法によって解く。即ち、

Ⅰ) $t = 0$ のとき、円柱表面上を除く全格子点で、 $\psi = \zeta = 0$ とおく。円柱表面上で、 $\psi = -\sin\theta$ 、 $\zeta = 0$ とおく。

Ⅱ) 以下の計算は、せん断流の場合と同じである。

5 計算結果ならびに考察

5.1 セン断流中の円柱まわりの流れ セン断流中の円柱まわりの流れは、表 - 1 に示す 7 つの場合

Case	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
ε 値	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.9	1.0
Re 数	15	20	30	100	20	20	20

表 - 1 セン断流の実験ケース

について計算を行なった。 $\varepsilon = 0$ の場合に、 $Re = 15, 20, 30, 100$ と変化させた場合 (Case ①～④) の圧力係数 C_p を $|C_p(\theta) - C_p(0)| / Re \times 100$ によって標準化したグラフを図 - 3 に示す。この図から、 ε 値が一定

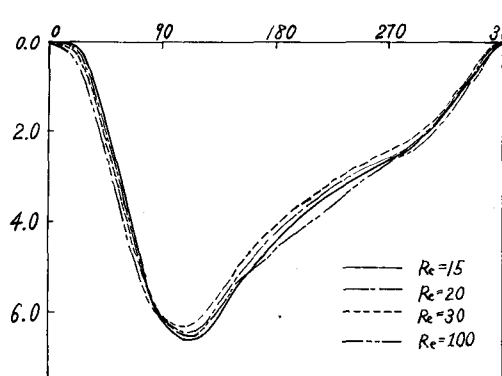


図 - 3 標準化した圧力係数

のとき、標準化した圧力係数の分布は、ほぼ同形となる事がわかる。 $Re = 20$ の場合に、 $\varepsilon = 0.0, 0.5, 0.9, 1.0$ と変化させた場合 (Case ②, ⑤～⑦) の圧力係数の分布を図 - 4 に示す。 ε 値の変化は $\theta = 0^\circ$ 及び 270° における C_p 値に影響するようである。 $\varepsilon = 0.0$ の場合で Re 数を変化させた時 (Case ①～④)、 Re 数と C_D, C_L, C_{Dp}, C_{Df} との関係を図 - 5 に示し、また、円柱に働く力 (C_D と C_L を合成した力) の方向と、 Re 数との関係を図 - 6 に示す。

$Re=20$ の場合で ε 値を変えた時 (Case ②, ⑤～⑦) に、 ε 値と、 C_D, C_L, C_{Dp}, C_{Df} との

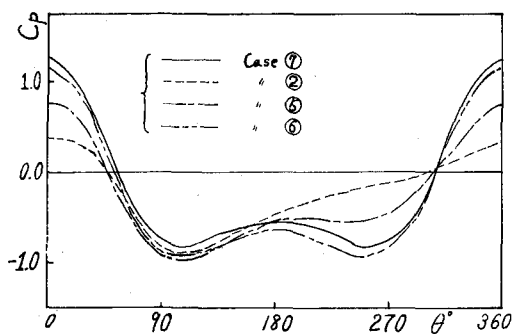


図-4 圧力係数の分布

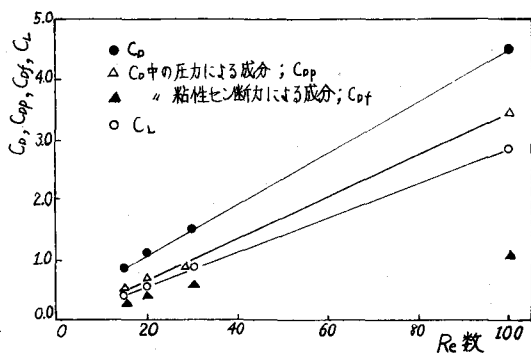


図-5 Re数と C_d, C_l, C_{dp}, C_{df} との関係

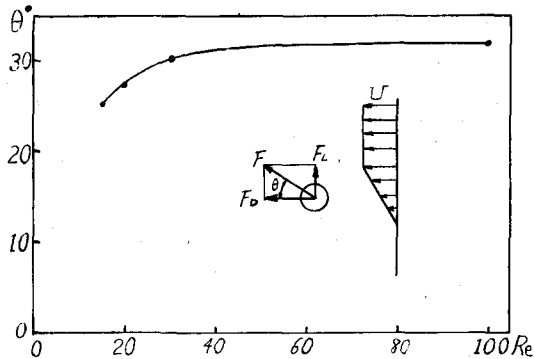


図-6 円柱に働く力の方向とRe数との関係

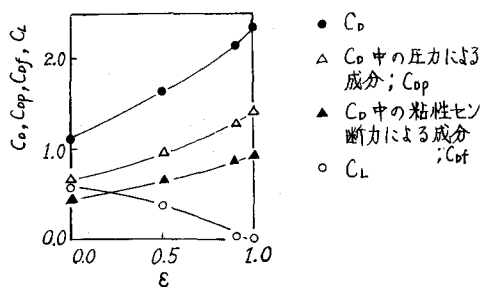


図-7 ϵ 値と C_d, C_l, C_{dp}, C_{df} との関係

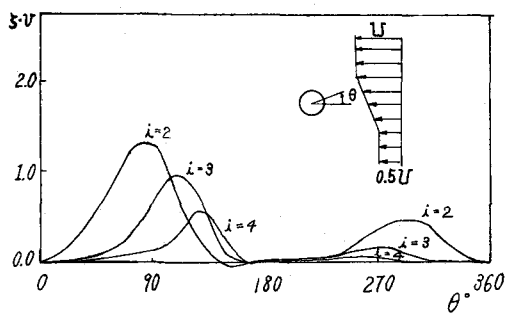


図-8 $\zeta \cdot \nu$ 値の分布 ($\epsilon = 0.5, Re = 20$)

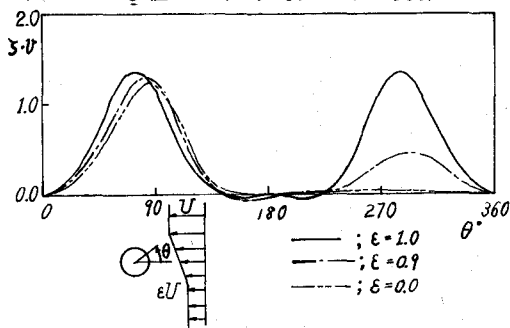


図-9 $\zeta \cdot \nu$ 値の分布 ($\epsilon = 0.0, 0.9, 1.0$)

関係を図-7に示す。図-8には、 $\epsilon = 0.5, Re = 20$ の場合 (Case ⑩) の円柱表面近くの $\zeta \cdot \nu$ の値の分布を示してある。また、図-9には、 $Re = 20$ で、 $\epsilon = 0.0, 0.9, 1.0$ (Case ⑪, ⑫, ⑬) のときの円柱表面近傍の $\zeta \cdot \nu$ の値の分布を示してある。図-4及び図-9から、円柱表面近くの $\zeta \cdot \nu$ の値の分布と、抵抗係数 C_p の分布との間に、強い相関性のある事がわかる。

5.2 振動流の場合 流速 U の一様流に、 $a \sin 2\pi ft \cdot U$ (ここで、 a, f, t は無次元量) なる周期的

Case	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯
a 値	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
f 値	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	$\frac{ft}{0.05}$	0.1	0.5	1.0	2.0

表-2 振動流の実験ケース

振動流を上乗せした流れの中の円柱まわりの流れを計算した。表-2に、計算を行なったケースを示す。(いずれのケースも $Re = 20$ で計算を行なった。) 抵抗係数の最大値 C_{dmax} と流速変動幅 a との関係を図-10に示す。こ

の図から、 C_{Dmax} と a との間に、線形の関係がある事がわかる。この結果は、Graf⁴⁾ らが実験的に乱流強度と C_D との関係求めた結果と、同じ傾向を示している。 C_{Dmax} 値は、振動数 f が増加するに従って、一定の値 3.9 に漸近する結果が得られた。(図-11)

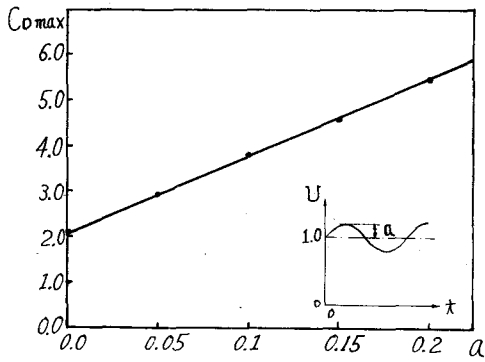


図-10 C_{Dmax} と a との関係

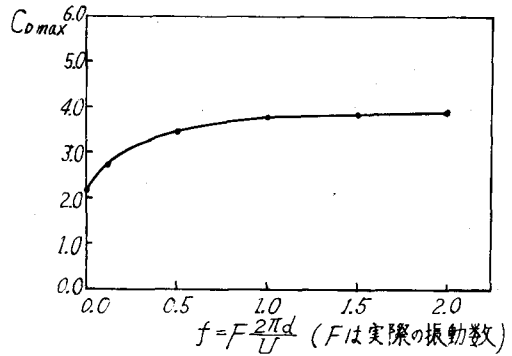


図-11 C_{Dmax} と f との関係

円柱後部に生じる定常渦は、流速変動とともに大きさが変動するが、その最大渦ができたときの円柱後端からセパレーション点に至る最大セパレーション角 θ_{sepmax} は、流速変動幅 a に比例して増加する。(図-12) 図-13は、 θ_{sepmax} をとる時期と、変動流速が最小となる時期との間の位相のずれ τ と振動数 f との関係を示す。

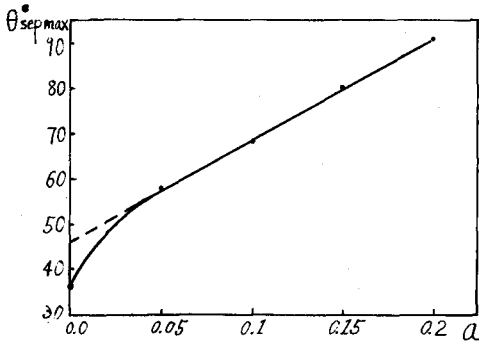


図-12 θ_{sepmax} と a との関係

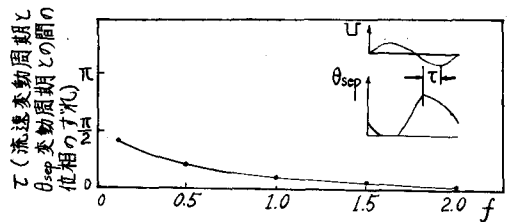


図-13 τ と f との関係

6 結 び

河床砂礫の移動はある確率関数で表わされるが、この関数と乱流との関係を求めるため、移動しようとする砂礫上の瞬間的な流れを既に水路実験により求めて来た。これは極めて困難な作業であることから、この数値実験を補助的に行ったが、低レイノルズ数であるにもかかわらず、両者の結果に相似した所が見られる。今後この数値実験の結果を参照して、精密な水路実験を継続し、又今回都合により行なわなかったセン断流に振動流を加えた流れについての計算も行いたいと考えている。

参考文献

- 1) Jain, P.C. & Rao, K.S.; 1969 Phys Fluid Sup II 12, II-57.
- 2) 日野幹雄・日野和子; 第12回海岸工学講演集
- 3) 岡島厚・高田浩之・浅沼強; 日本機械学会論文集(昭和46-12), 37-304.
- 4) Ko, S.C. & Graf, W.H.; 1972 J. Hydraulic Division Pro. ASCE 5, 892-912.