

東京工業大学 工学部 工博 日野 幹雄
 電源開発KK 原子力室 工博 大西 外明
 三菱総合研究所 MCC 羽生 正範

要 旨： 流体の流れの数値解析が難かしいのは、實際上問題となる流れの状態がレイノルズ数の高い乱流状態にあり、流体運動の基礎方程式の単なる数値計算化が不可能な点にある。そのため普通は乱れの作用を渦動粘性係数で表現することが行われるが、この係数を経験的に与えている。本報告では、経験式や実験値を用いることなく乱れのエネルギー逸散式とコルモゴロフのエネルギー・スペクトル理論から、渦動粘性係数を決定する Smagorinsky-Deardorff の方法により、噴流と turbulent spot の数値解析を行った結果について述べる。

I 序 論

流体の運動は Navier-Stokes の方程式と連続の方程式により記述される。しかしながら、この方程式の厳密解が得られるのは極く限られた場合にすぎず、また例え単純な条件のもとの流れ（例えば、Poiseuille 流れや Couette 流れ）でも実際上問題となるレイノルズ数の高い乱流状態では厳密解は求められない。乱流は N - S 方程式の非線型慣性項の作用が粘性項の作用に較べて大きい状態であり、流れる場は微小な外乱の非線型的増幅の結果、空間的にも時間的にも不規則偶然的に変化し、あらゆる周期・波長の変動が存在する。それゆえに、対象領域を格子網でおおい微小時間間隔で基礎方程式を差分化して解くという、通常の数値解析の方法は適用しない。

乱流の問題はつまるところ、乱れによって生じる乱れ速度の二次モーメント（レイノルズ応力）を如何に表現するかという事である。レイノルズ応力の表現を運動方程式と連続の方程式より理論的に求めようとすれば；二次モーメントに関する微分方程式の中に乱れの三次モーメントが含まれ；さらに三次モーメントに関する方程式を導くとこの中に乱れの四次モーメントが含まれるというように、次々に乱れの高次モーメントが現れ際限がない。このような自縛的状态を何処で打ち切るかが問題で、これを完結問題（Closure Problem）と呼んでいる。以下に完結問題の解決方法についてこれまでなされた提案を概説する。

(1) 一次モデル： 完結問題を最も早く打ち切るのには、乱れの二次モーメントを流れの平均量に関して表わせば良い。これには次の方法がある。

(a) Boussinesq の渦動粘性係数 乱れの作用を分子粘性とのアナロジーとして渦動粘性係数（kinematic eddy viscosity）により表現することは、すでに 19c 後半 Boussinesq により提案されて以来、現在においても広く行われている。レイノルズせん断応力 τ は、壁面に平行な流れの場合では

$$\tau = \rho \epsilon(y) \frac{du}{dy} \dots\dots\dots (1)$$

と表わされると考える。ここに、 $\epsilon(y)$ は渦動粘性係数で一般には経験に基づいて定められる。

(b) Prandtlの混合距離理論 Prandtlは乱れ強さがその点の平均流速の勾配に比例すると考え、レイノルズ応力 $\tau = -\rho \overline{u'v'}$ について

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \dots\dots\dots (2)$$

の形を仮定し、 l を混合距離と名づけた。 l についてはさらに壁面近くでは次の関係を仮定した。

$$l = \kappa y \dots\dots\dots (3)$$

(c) Karmanの類似仮説： Karman は乱れの構造の相似性から l に関して式(4)を提案した。

$$l = \kappa \frac{du}{dy} \bigg/ \frac{d^2u}{dy^2} \dots\dots\dots (4)$$

(2) 準二次モデル (Bradshaw-Ferris-Atwell モデル)： Bradshawらは乱れの二次モーメント $\tau = -\rho \overline{u'v'}$ が乱れとは無関係に平均流速の勾配で表現されることに疑問をいだいた。そして、乱れを代表するものは平均流速の微分ではなく、乱れのエネルギー $\overline{q^2} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ であろうと考え

$$\tau = a(\eta) \overline{q^2}(x, \eta) \dots\dots\dots (5)$$

さらに、 $\overline{q^2}$ の変化を表わすものとして乱れのエネルギー方程式を導入した。式(5)の関数 $a(\eta)$ (η ：壁からの無次元距離)や乱れのエネルギー方程式に用いる渦のスケール $L(\eta)$ に関しては実験結果より経験的な普遍関数形を提案した。Bradshawらの方法は、従来の乱流計算法を大きく前進させたものであり、比較的単純な式で種々の乱流場について良い結果を支えるものとして評価されている。しかしこの方法が現在のところ境界層型の流れの計算に限られていることと、経験式がいくつか使用されていることに今後の研究の余地を残している。

(3) 二次モデル： レイノルズ応力あるいは渦動粘性係数を乱れの二次モーメントの段階で閉塞しようとするもので、その代表的なものは、エネルギー方程式・混合長方程式によるものである。渦動粘性係数を Taylor-Prandtl-Kolmogorov 仮説により

$$K = \overline{l'v'} \dots\dots\dots (6)$$

と考えると、乱れ v' と混合長 l' に関する方程式を導入し完結問題を乱れの二次オーダーで打ち切る方法は、最近非常に多くの研究者により提案され、計算結果についての論文・単行本が刊行されている。多くの場合、乱れのエネルギー方程式と新たに混合長に関する乱れ変動による方程式(仮説)が導入されている。

(3) Smagorisky-Deardorff モデル： これまでの方法では乱れの統計的平均は時間に関して採られて来た。これは解析的に流れを解く場合に適しているが、格子網を組んで数値解析を行おうとする場合には適当ではない。というのは、格子網以下の微細な変化は取扱い得ないのであり、各格子点での値は格子網の大きさの範囲を代表する値であると考えなければならない。したがって、N-S方程式の平均化は時間に関してではなく、空間の小領域について行われる。この操作の結果導入されるレイノルズ方程式のレイノルズ応力は通常の場合のレイノルズ応力と異り、格子網スケールのそれであり例えば流れの場が統計的に定常であっても、常に時間の関数である。乱れ的作用をスケールによって切断して考えるというのは Weizsacker-Heisenberg 以来の乱流理論の成果である。

さて、 $\overline{u(t) \cdot w(t)}$ を格子網スケールでの空間的平均流速、 $\overline{u'w'}(t)$ を格子網スケールでの平均により

生じるレイノルズ応力とすれば, Boussinesq の渦動粘性係数(1)の考え方を拡張して

$$-\overline{u'w'}(t) = -K(x, y, t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_l u'_l} = -K \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

と書ける。ここに, 式(1)の ϵ と区別するために格子網渦動粘性係数を $K(x, y, t)$ とする。また, エネルギー-逸散率 ϵ は,

$$\epsilon = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = K \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表わされる。式(8)(9)には Einstein Sun 記号が用いられている。

一方, 格子網は Kolmogorov の $-5/3$ 乗則に従う慣性領域にあると考えると

$$S(k) = \alpha \epsilon^{-2/3} k^{-5/3} \quad (\alpha = 1.5) \quad *) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。上式を k に関して $k = k_d \sim \infty$ すなわち, $(2\pi/\Delta \sim \infty)$ の範囲で積分すれば

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} &= \frac{3}{2} \alpha \epsilon^{2/3} k_d^{-2/3} \\ &= \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2/3} \epsilon^{2/3} \Delta^{2/3} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

である。したがって, 渦動粘性係数は Taylor-Prandtl-Kolmogorov 仮説により

$$\begin{aligned} K(x, y, t) &= (\sqrt{\overline{u'^2}} \Delta) \\ &= C^{1/3} \epsilon^{1/3} \Delta^{1/3} \\ &= (C\Delta)^{1/3} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{1/3} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

と表わされる ($C: O(0.1)$ の普遍定数)。式(12)の表現が一次モデルと基本的に異なるのは, $\bar{u}_i$ が格子網スケールの空間的平均値で, 例え流れが統計的に定常であっても, $\bar{u}_i$ したがって K はつねに時間的に変動するという点である。

(3) 高次モデル: 完結問題をより高次の乱れモーメントの所で打ち切ろうとする試みも行われているが, 式の数が多くなるのみにとどまらず, 経験的定数なども多く持ち込まれるのが普通である。

乱流の数値計算における以上の諸方法を比較した結果, 適応性の広さと理論性の点で Smagorsky-Deardorff の方法が最も良いと判断された (Fig. 1 参照)。

II 乱流の数値解析

流れを 2 次元とする, 各点の流速を格子網スケールでの場所的平均流速 $\bar{u}_i$ とそれよりの変化分 u'_i

$$\begin{aligned} \text{の和} \quad u_i(x, y, t) &= \bar{u}_i(x_m, y_n, t) + u'_i(x, y, t) \quad \dots\dots\dots (12) \\ &\quad (x_{m-1/2} \leq x < x_{m+1/2}, \quad y_{n-1/2} \leq y < y_{n+1/2}) \end{aligned}$$

で表わし, これを Navier-Stokes の運動方程式に代入し格子網スケールの平均操作を行えば, 次の関係式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{Q}x - \frac{\partial \bar{p}''}{\partial x} + R^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + 2 \quad **) \quad \dots\dots\dots (13)$$

*) 2 次元乱流の速度変動エネルギー・スペクトルに関して, Kraichnam (1972) は $S(k) \propto k^{-5/3}$ および $S(k) \propto k^{-3}$ の二つの平衡領域スペクトルを提出している。

**) 流れが管路や開水路のように圧力勾配をもつ場合に式(13)の右辺の 2 の項を考慮する。

$$\text{ここに,} \quad \bar{Q}_x = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 + \bar{u'^2} - \frac{1}{2}(\bar{u'^2} + \bar{w'^2})) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w} + \bar{u'w'}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \bar{Q}_z - \frac{\partial \bar{p}''}{\partial z} + R^{-1}(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{ここに,} \quad \bar{Q}_z = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{w} + \bar{u'w'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}^2 + \bar{w'^2} - \frac{1}{2}(\bar{u'^2} + \bar{w'^2})) \\ - \langle \bar{w}^2 + \bar{w'^2} - \frac{1}{2}(\bar{u'^2} + \bar{w'^2}) \rangle \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}''}{\partial y^2} = \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $\langle \rangle$ は x 方向の平均を採ることを意味する。

また、場所的変動の二次モーメントは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u'^2} - \frac{1}{2}(\bar{u'^2} + \bar{w'^2}) &= -2K \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \bar{u'w'} &= -K(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}) \\ \bar{w'^2} - \frac{1}{2}(\bar{u'^2} + \bar{w'^2}) &= -2K \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\text{ここに,} \quad K(x, y, t) = (C\Delta)^2 \{ 2(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x})^2 + 2(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z})^2 \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

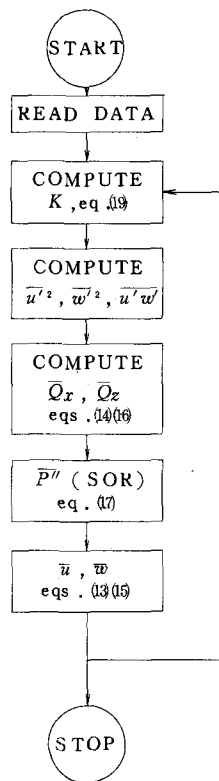
以上の式13~19を差分表示し、右のフロー・チャートに従い計算を行う。差分式や計算の手順については、別に詳しく発表の予定であるが、層流の場合の流体計算の標準方法に依っている。

基礎方程式13,19は熱伝型の偏微分方程式であるので、計算安定条件として

$$K \frac{\delta t}{\Delta^2} < \text{const} \quad \dots\dots\dots (20)$$

を用い、計算の進行につれて K が増大し上の条件が満たされなくなると、計算の時間ステップ δt をプログラム内で小さく切り換えるようにしている。

従属変数のうち $\bar{u}$ と $\bar{w}$ の境界条件は一般に与えられる。しかし、 $\bar{p}''$ の境界条件は特別の場合を除いて与えられないので基礎方程式から $\bar{u}$ ・ $\bar{w}$ の境界条件を用いて導く必要がある。本論文では、境界上での $\bar{p}(x, y)$ の Taylor 展開と式18を用いてこれを定めた。他のもっともらしい $\bar{p}$ の境界条件を与えた場合には、物理的に納得しえない結果となったが、われわれの方法においてはそれはみられなかった。



Ⅱ 計 算 例

(a) 噴 流： 序論に述べた種々の乱流シミュレーションの方法の多くは、壁面の影響を受ける場合を主対象として考えられている。噴流を対象とすれば応用しうる計算方法も自ずと制限されてくる。Smagorinsky-Deardorffモデルは、完結問題の最もすんだ実用解決法であるとともに、噴流計算にも最も適した方法であると考えられる。

ところで、Boussinesq の渦動粘性係数の概念に対する最も手痛い反論は、管路の中心や噴流の軸上では $\partial \bar{u} / \partial y = 0$ であるため ϵ が有限である限りレイノルズ応力は零となってしまう点である。しかし Deardorff モデルは渦動粘性係数の概念を用いているとは云え、通常の場合とは異り各瞬間瞬間の格子網スケールの場所平均を云っているものであり、噴流の軸上でも $\partial u(x, o, t) / \partial y$ は零ではなく不規則に変化し、上述の批判には該当しない。

さて、 x 方向に 20 メッシュ・ y 方向に 10 メッシュの格子網を組み、静止流体中に底面から噴流を噴出させた場合の計算を、左方が壁の場合について行った。それぞれのケースについて、噴流が徐々に形成される様子を Fig. 2 3 に示す。

(6) 乱流スポット： Taylor-Prandtl-Kolmogorov の乱流混合係数（渦動粘性係数）に関する仮説の妥当性を調べるには、最も単純な状態を対象としてシミュレーションを行えば良い。それには、等方向一性乱流場や乱流スポットの時間的変化などの計算をすれば良い。ここでは、後者の場合についての例を Fig. 3 に示す。

— 参考文献 —

- (1) Brabshaw, P., Ferris, D. H. & Atwell, N. P.: Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., vol. 28, p. 593 (1967)
- (2) Deardorff, J. W.: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flows at large Reynolds numbers, J. Fluid Mechanics, vol. 41, p. 453 (1970)
- (3) 日野 幹雄： コンピューターと流体力学、最近の二、三の問題点、土木学会誌、56 巻 11 号 p. 45 (1971)
- (4) Kraichnan, R. H.: Inertial-range transfer in two- and three- dimensional turbulence, J. Fluid Mech., vol. 47, p. 525 (1971)

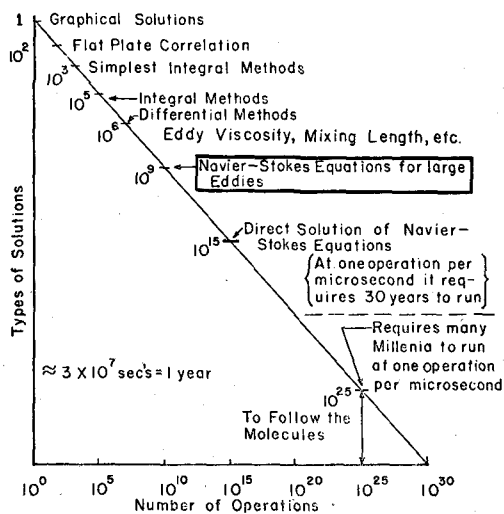


Fig. 1: Kline S.J, Morkovin, M.V, Sovran, G. & Cockrell, D.J.による

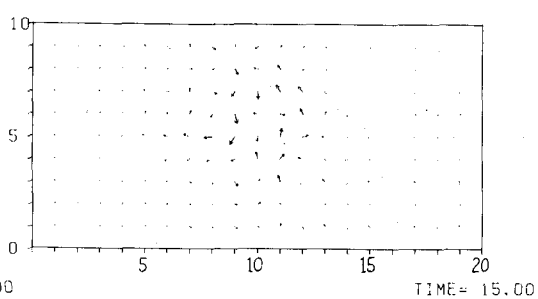
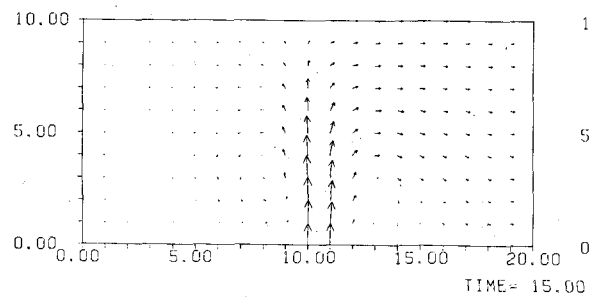
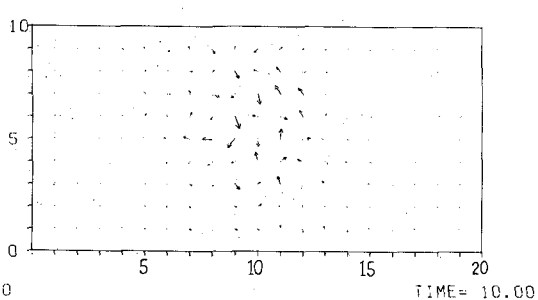
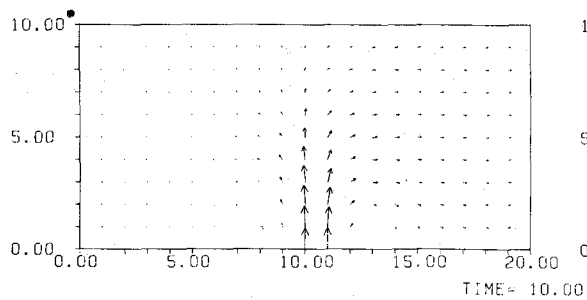
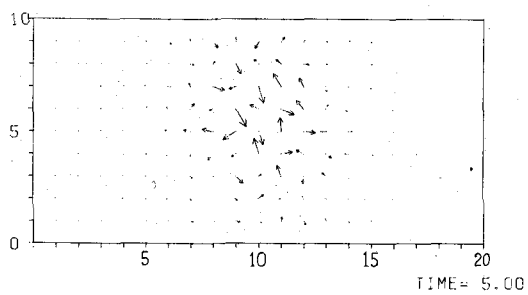
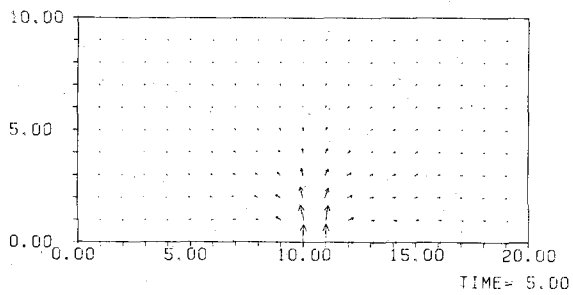


Fig. 2: 噴流の形成

Fig. 3: 乱流斑点の拡散