

1. まえがき

図-1に示すような海水飽和地盤中に設置された暗きよから、淡水を注入した場合の定常状態の解は、さきに Zhukovsky関数を用いて、複素ポテンシャル理論から求められているが、ここでは海水地盤領域を垂直上方の淡水平行流に置換して、この流れと暗きよからの流れとの2つの流れの重ね合わせから解析する方法を示し、比較的容易に近似解をうることをのべた。つぎに、この解析結果を用いて、淡水注入時の非定常状態の淡塩境界面を求め、実験結果と比較検討した。

2. 基本的考え方

図-1のように淡水注入暗きよにより海水飽和地盤中に形成された定常状態に達した淡塩境界面について考察しよう。この場合の淡水からみた等ポテンシャル線は図-2のようになり、境界面より外側の地盤中の海水は静止しているが、そのポテンシャルは、淡水と海水の密度を ρ_f, ρ_s 、透水係数を k 、任意点の圧力を p ($y=0$ の圧力を $p_0 = \rho_f g h$ とすれば $P = \rho_f g h - \rho_s g y$) とすれば、

$$\Phi = k \left\{ \frac{p}{\rho_f g} + y \right\} = k \left\{ \frac{\rho_f g h - \rho_s g y}{\rho_f g} + y \right\} = k h - k \epsilon y \quad \dots (1)$$

$$\text{ここに } \epsilon = (\rho_s - \rho_f) / \rho_f$$

すなわち図-2のように、淡水からみた海水領域の等ポテンシャル線は水平で、そのポテンシャル値は下方に $k\epsilon$ のこう配で直線的に増加している。このような海水領域のポテンシャル分布は、垂直上方に向う淡水の平行等速流れのポテンシャル分布と考えられる。したがって、淡水注入暗きよから流出する淡水の流れと、垂直上方に向う淡水の等速平行流れとを重ね合わせ

れば、この結果えられる2つの流れの領域境界

面（以下、領域境界とは、ここでいう2つの流れの境界とする）は、淡塩境界面に近似するのではないかと考えた。しかし、この重ね合わせの結果は、図-3のように、領域境界付近外側では垂直上向流の変向のために等ポテンシャル線が変形し、図-2の海水領域のポテンシャルこう配 $k\epsilon$ を与えた垂直上向流に対する領域境界面は、図-2の淡塩境界面と大きさがかなり異なる。一般に垂直上向流のポテンシャルこう配を変えると領域境界面は大小に変化する。しかしその形状は淡塩境界面とほぼ

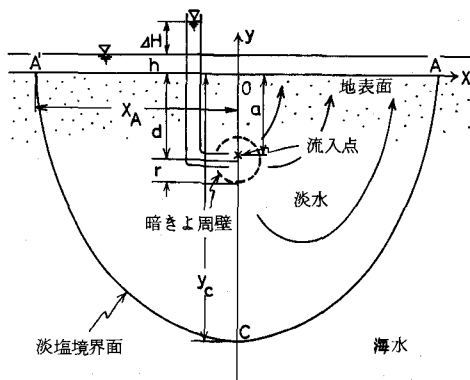


図-1 流れの場合

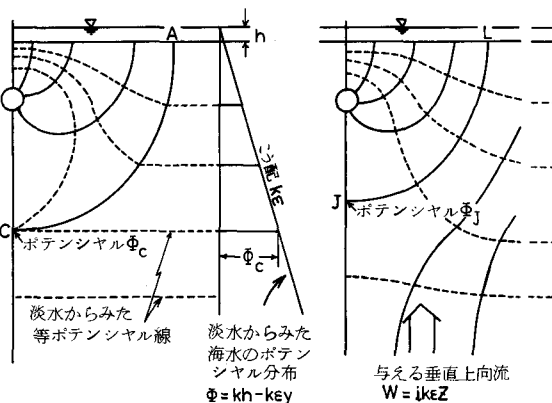


図-2 淡塩境界面

図-3 領域境界面

ら $\mathcal{V}_C$ は炭塩境界面下端ではないといえる。以上の考察から、交点 K に対する $\mathcal{V}_K$ が炭塩境界面下端に相当するといえる。すなわち r 線、 s 線の交点 K に対する m_K をもつ垂直上向流と暗きよからの流れとの重ね合わせでえられる領域境界面が、ほぼ求める炭塩境界面になるといえる。

前述に従つて、垂直上方への平行流の複素ポテンシャルを $i(k\varepsilon/m)z$ とする。つぎに暗きよからの淡水流出流れの流出点の位置を $z=-ai$ 、領域境界内の浸透流量を q とすれば、2つの流れの重ね合わせとして、その複素ポテンシャルは

式(2)に $W = \Phi + i\Psi$, $Z = x + iy$ を代入して実数部と虚数部に分けると,

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2ax}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{\rho}{\epsilon} \frac{\epsilon}{m} x \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。暗きよ周壁の上端 ($x=0, y=-d+r$) と下端 ($x=0, y=-d-r$) とが $\Phi=\mathbb{R}(4H+r_0)$ の等ポテンシャルである
ことを考慮すると、式一三より

$$z \geq R \quad A = 4\pi r R \epsilon / q_m$$

がえられる。また暗きよ注入量の算定式は式一〇で表わされる。

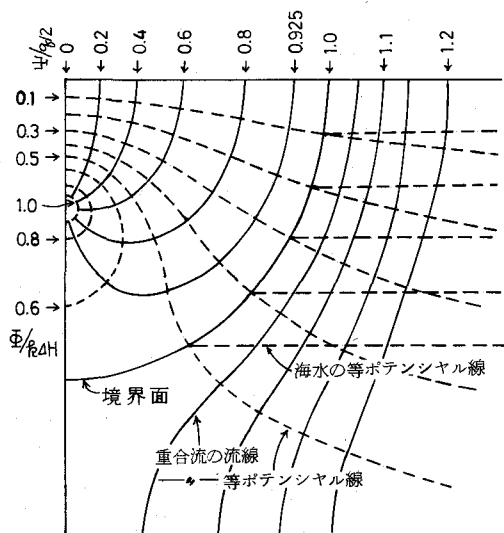


図-5 密度流と重合流の流線と
等ポテンシャル線(計算結果)

$$q = \frac{2\pi \{k_r H - k_r \frac{\epsilon}{m} (d-r)\}}{\ln \frac{a+(d-r)}{a-(d-r)}} \dots\dots\dots (6)$$

つぎに領域境界面の形状は、式-4に $\psi = q/2$ を代入した式-7で表わされ、特に領域境界下端Jの位置は、 $V = -(\partial\Phi/\partial y)_{y=0} = 0$ から求めた式-8より算定される。

$$\tan\left(\frac{q/2 - k\epsilon x/m}{q/2\pi}\right) = \frac{2ax}{a^2 - x^2 - y^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$y_J = -\sqrt{(qma/\pi k\epsilon) + a^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

つぎに図-4の m_K の値を決定しよう。領域境界下端Jのポテンシャルは式-9となるが、前述のように、これが $\Phi = k_h - k\epsilon y$ に等しくなければならない。すなわち

$$\Phi_J = \frac{q}{4\pi} \ln\left(\frac{y_J - a}{y_J + a}\right)^2 + k_h - k\frac{\epsilon}{m}y_J \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$k_h - k\epsilon y_J = \frac{q}{4\pi} \ln\left(\frac{y_J - a}{y_J + a}\right)^2 + k_h - k\frac{\epsilon}{m}y_J \quad \dots\dots\dots (10)$$

これに式-5, 6, 8を代入して m を求めればよい。この m を用いれば、式-6, 7, 8から領域境界面、暗きよからの淡水流量などの水理諸量が求められる。

4. 厳密解との比較

淡水注入暗きよによる淡塩境界面については、さきにZhukovsky関数を用い、複素ポテンシャル理論からその厳密解を求めている¹⁾。結果のみを簡単に記せば右のようである。

$$q = \frac{2\pi k \Delta H}{\ln \frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\ln \frac{\sqrt{\alpha - \beta^2} + \beta\sqrt{\alpha - 1}}{\sqrt{\alpha - \beta^2} - \beta\sqrt{\alpha - 1}} = \frac{k\Delta H - k\epsilon(d-r)}{k\Delta H} \cdot \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\ln \frac{\sqrt{\alpha - 1} + \sqrt{\alpha\beta^2 - 1}}{\sqrt{\alpha - 1} - \sqrt{\alpha\beta^2 - 1}} = \frac{k\Delta H - k\epsilon(d+r)}{k\Delta H} \cdot \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad \dots\dots\dots (13)$$

淡水注水量は式-11, 12, 13を連立に解いてえられ、淡塩境界面の形状は

$$x = \frac{q}{2\pi k\epsilon} \cdot \tan^{-1} \frac{-2\sqrt{\alpha - 1}\sqrt{\beta^2 - \alpha}}{(\alpha - 2)\beta^2 + \alpha} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$y = -\frac{q}{2\pi k\epsilon} \cdot \ln \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \quad \dots\dots\dots (15)$$

淡塩境界面の地盤表面上右端Aおよび下端Cの位置は次式で表わされる。

$$x_A = \frac{q}{2\pi k\epsilon} \cdot \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\alpha - 1}}{2 - \alpha} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$y_C = -\frac{q}{2\pi k\epsilon} \cdot \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

いま、これらの式からの計算結果と、前述の近似解の結果とを比較すれば、表-1となる。これによると、2つの流れの重ね合わせで求めた近似解は厳密解と非常によい一致を示しているといえよう。またこの一例を図-5に示している。境界面内部の流線、等ポテンシャル線は、表-1からも明らかなように、ほとんど一致し、図では区別できなかった。

表-1, 近似解と厳密解の計算結果

1/ε	r/d	ΔH/d	重ね合わせの解				厳密解		
			m	q/kΔH	x _L /d	y _J /d	q/kΔH	x _A /d	y _C /d
40	0.1	0.1	1.8709	1.8179	1.9952	2.2956	1.8175	1.9920	2.2964
		0.5	1.9750	2.0460	5.0249	5.1540	2.0460	5.0246	5.1541
40	0.3	0.1	1.9212	2.9109	2.5174	2.7347	2.9108	2.5160	2.7350
		0.5	1.9849	3.2685	6.2386	6.3341	3.2685	6.2386	6.3342

5. 淡塩境界面の近似的非定常解

ここでは、図-1に示す海水飽和地盤に設置した暗きよから地盤中に淡水を注入してゆく場合の、非定常状態の淡塩境界面を算定した。この求め方は、Muskat²⁾あるいはBear & Jacobs³⁾によつて井戸による2次元水平流の場合に用いたものである。これは非定常状態の流線網と定常状態の流線網が同じであるとし、非定常状態の境界面の進行速度は、定常状態における、同じ位置の淡水の浸透速度に等しいという仮定をおいている。すなわち、この仮定によつて、定常状態における淡塩境界面内部の流線にそつて、各時刻の各粒子の移動位置を求めて結び、その時刻の淡塩境界面を求めた。この方法では、定常状態の淡塩境界面の内部の流れがわかつていれば求められるので、厳密解による結果を用いればよいが、算定がかなり面倒であるので、ここでは前述の2つの流れの重ね合わせによる解を用いて算定した。以下にのべるように、かなり簡単な式により求められることがわかる。

地盤の空隙率を n とすると、浸透領域内の実流速は、ポテンシャル流の基礎理論より

$$u = -\frac{1}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{n} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{で表わされるから、時間を } t \text{ とすると、式-3}$$

より

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{q}{n\pi} \frac{2axy}{\{x^2+(y-a)^2\}\{x^2+(y+a)^2\}} \quad \dots\dots 18$$

となる。また流線の方程式は式-4より

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2 - 2ax \cdot \cot \left\{ \frac{2\pi}{q} \left(\Psi - \frac{e}{m} x \right) \right\}} \quad \dots\dots 19$$

で表わされる。したがつて、淡水が暗きよ周壁 (x_0, y_0) より、ある流線 ($\Psi = \text{Const}$, 定常状態の流線) にそつて、ある位置 (x_1, y_1) に到達するまでの時間は、式-18に式-19を代入して、 x_0 より x_1 まで積分した式で与えられる。いま a で無次元化して $x/d = X, a/d = Y_a, q/ke d = Q$ とおけば、

$$T = \frac{tke}{nd} = \frac{\pi}{Q} \int_{x_0}^{x_1} \frac{2X \cdot Y_a \cdot \cot \left\{ \frac{2\pi}{Q} \left(\frac{\Psi}{kd} - \frac{e}{m} X \right) \right\}}{\sqrt{Y_a^2 - X^2 - 2X \cdot Y_a \cdot \cot \left\{ \frac{2\pi}{Q} \left(\frac{\Psi}{kd} - \frac{e}{m} X \right) \right\}}} dX \quad \dots\dots 20$$

したがつて、式-19より流線を描いておき、各流線上の等時到達位置を結べば、その時刻における淡塩境界面を描くことができる。このようにして求めたものが、図-6である。

6. モデル実験による検証

淡水注入の実験を行ない、前述の計算結果と比較してみよう。実験装置は図-7に示すような、2枚の透明のアクリル板 (厚さ5mm) を用いたHele-Shawモデルで、平板の間隔 $D = 25 \text{ mm}$ とした。暗きよより注入する淡水には 14°C で $\nu = 3.0 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $\rho = 0.932$ の油を用い、地盤側の海水には水道水を使用した。この場合 $1/\varepsilon = 13.7$ となる。非定常時の境界面の実験曲線は、実験時に写真撮影したものを、後で実物大に拡大して描く方法をとつた。また定常状態の境界面は、うしろ側のアクリル板の裏面に張りつけた方眼紙によつても読みとつた。

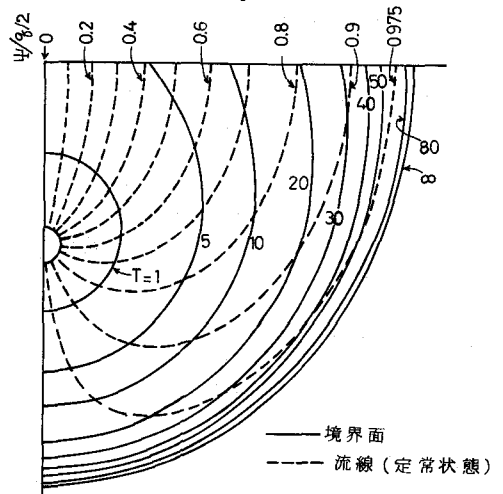


図-6 算定非定常淡塩境界面

図-8に実験結果と計算結果 ($4H/d=0.3$, $r/d=0.1$, $h/d=0.004$ の場合) を示している。この図の各境界面とそれに付した注入開始からの経過時間は、実験結果(実線)については実測値そのものであり、計算結果(点線)については、式-20において、実験装置の透水係数 $k=gD^2/(12\mu)=1.7\text{cm}^2/\text{sec}$ 、空隙率 $n=1$ として求めた時間、およびその時間の算定境界面である。この図により実験結果と計算結果とを比較すると、定常状態の形状はよく一致している。つぎに非定常状態については、実験結果がかなり早くな

っている。この原因については、(1)かなりの速度で流出することから、ある程度実験誤差が考えられること、(2)前項でのべたように非定常過程の計算においてとられた仮定による誤差、および(3) Bear⁴⁾らがのべているような可動率(mobility ratio) $M=\frac{\rho_1}{\mu_1}/\frac{\rho_2}{\mu_2}$ (添字1は注入液体ここでは油、添字2は地盤側の液体ここでは水道水に対するもの)の効果、すなわち計算では $M=1$ とした結果であるが、実験では M はかなり小さな値の場合となつてることによる影響などが考えられ、今後検討してゆきたいと考えている。なお(3)については、粘性係数 μ がほぼ同じで、密度の異なる2つの油により実験を行なつてみたいと考えている。

7. むすび

本報は、静止する海水で飽和された地盤中のポテンシャルが、淡水からみると kE のこう配で深さ方向に増加する分布をもつことに着目して、この地盤中の海水を垂直上方向へ向う淡水の平行等速流におきかえ、この流速(ポテンシャルこう配)を、淡塩境界面のある特定点のポテンシャルが、淡水からみた海水地盤中のポテンシャルの条件に一致するように選ぶことによつて、近似的に地下密度流の解をえようとしたものである。

ここでは、海水飽和地盤中に設置した淡水注入暗きよから淡水を注入させる場合の定常状態の近似解を、上述の垂直上方向淡水平行流と暗きよからの淡水流出流との2つの流れの重ね合わせとして求めた。この解は厳密解および実験結果と比較して非常によい一致を示した。またこの解の結果を用いて、非定常状態の淡塩境界面を近似的に求めた。これを実験結果と比較すると実験結果がかなり早く

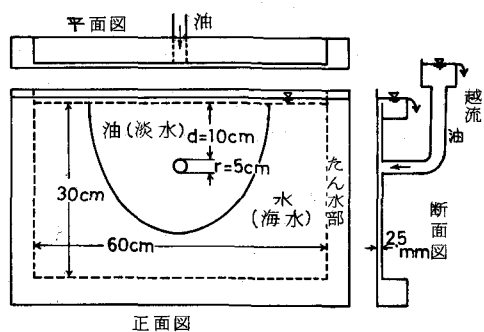


図-7 実験装置

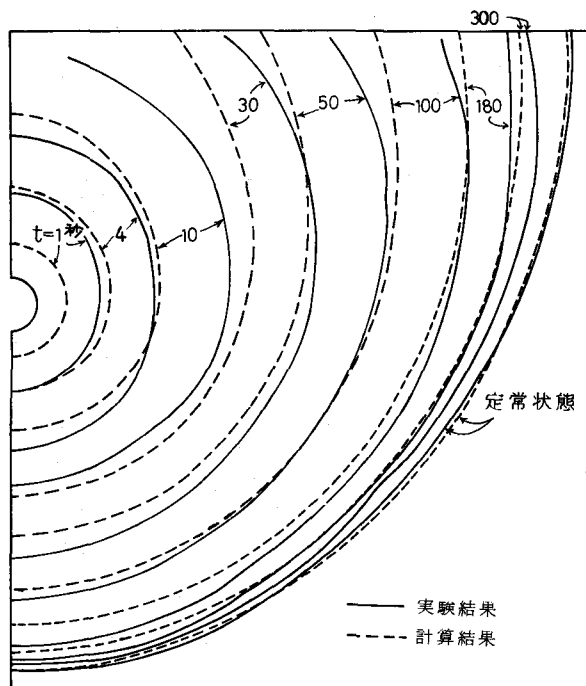


図-8 計算と実験結果

なり，これについては今後の検討にまつ所が多い。

本報でのべた手法を用いれば，従来困難と考えられていた，井戸からの淡水注入による淡塩境界面などの定常状態の解なども，近似的に求めうるものと考えられる。

終りに，本研究は昭和47年度文部省科学研究費の援助のもとに行なわれた。ここに記して謝意を表する。

○参考文献

- (1) 上田、杉尾、神野：海水飽和地盤中の淡水注入暗きよによる淡塩境界面の解析、九州大学工学集報 第45巻第1号、P. 51~56, 昭和47年1月。
- (2) M. Muskat : The flow of homogeneous fluids through porous media, P. 466~476, McGraw-Hill, 1946.
- (3) J. Bear and M. Jacobs : On the movement of water bodies injected into aquifers, J. Hydrology Vol. 3 No. 1, P. 37~57, 1965.
- (4) J. Bear : Two-liquid flows in porous media, Advances in hydrosience, Vol. 6, P. 179~187, Academic press, 1970.