

混合を伴う内部ジャンプについて

Univ. of Waterloo 正員 早川典生

Univ. of Minnesota Heinz Stefan

1. はじめに

密度差を伴う二層流に、急激な水深の変化をみるこことがある。これは内部跳^{ジャンプ}水 (Internal hydraulic jump) と呼ばれ、そこでは強い乱れと二層間の混合が観測され、やがては混合の非常に少ない安定した二層流に変わっていく。内部ジャンプは三次元より二次元の密度流に起りやすいようであり、その研究も二次元でなされているのがほとんどである。内部ジャンプの研究の重要性は、密度流乱流の基本的理解ならびに diffuser としての応用問題 (Stefan and Hayakawa [1]) にある。

二層流内部ジャンプの問題は Schijf and Schönfeld [2] によってはじめて研究され、Yih and Guha [3] は一般的なモーメント方程式の解を検討した。彼らの研究は Hayakawa [4] によって岩崎 [5] の導いたエネルギー方程式を用いて吟味された。同様の研究が浜田 [6] および椎貝 [7] によって報告されている。内部ジャンプは通常二層間の混合を伴うものである。この混合が積極的に研究されたのは最近であって、岩崎と上原 [8] はくわしい乱流測定を報告している。Wood [9] ははじめて下層流の内部ジャンプに混合を考慮したモーメント方程式を提唱した。また、Wilkinson and Wood [10] は自由表面をもたない上層流の観測結果を報告している。自由表面をもつ上層流については、Stefan [11]、Stefan and Hayakawa [1] 等の研究がある。Stefan は種々の観測例を分類し、Stefan and Hayakawa は下層に静水圧分布を仮定してモーメント方程式の解を求め、実験結果との比較を報告している。

この報告では Stefan and Hayakawa の実験結果を簡略に紹介し、混合を伴う二層のモーメント方程式を導き、その解を検討しようとするものである。

2. 実験装置と実験観測の概要

実験装置は図-1に模式的に示すように、30 cm 幅 (1 ft)、長さ 12 m (40 ft)、高さ 37 cm (15 inches) の水路からなる。上流端からは一定流量の温水が注入され、導入水路を経て冷水と混合する。上層流は上下移動可能な“舌”状の装置により選択取水される。定常状態を保つために下層には下流端から冷水を注入し、その一部は上層流に混合されて除かれ、残りは水路下流端のせきから越流する。この選択取水装置と給排水装置の組合せにより、混合の割合の測定と定常状態の維持が可能になっている。実験条件の設定は冷温水給水、温水取水量、“舌”の位置、下流端のせき、温水温度という多数の条件が、定常状態を与えるある定まった組合せに達するのを試行錯誤的に探し出すという困難な操作を伴った。水温はサーミスター温度計により測定された。温水には微量の過マンガン酸カ

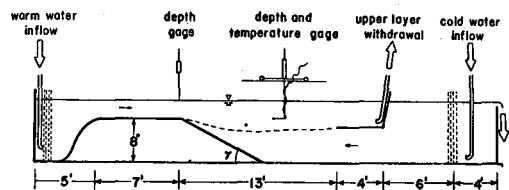


Fig. 1 Experimental facility

りをとかし目による観測を可能にさせた。ビーチの底角 γ は 90° 、 23° 、 5.75° の三種が試験された。温水温度は冷水温度より常に 10°C 以内であり、室内の平衡温度に近く自由表面からの熱損失は無視できる程度であった。実験は常に上流側の密度フルード数が 1 以上の条件で行われ、導入水路への冷水くさびの進入はみられなかった。

大別して次の三種類の流況が観測された：(1) 高い密度フルード数と深い下流側上層水深。上層流は大部分ジェット流として流れ、subcritical flow への変化はおだやかであり、ローラーの存在は分りにくい。(2) 高い密度フルード数と浅い下流側上層水深。subcritical flow への変化は大きなローラー（渦）を伴い、内部ジャンプとしての特徴が顕著である。(3) 低い密度フルード数 (>1) と深い下流側上層水深。上層流は導入水路端からいきなり剝離せず、もぐりジャンプのごとく段階的に水深を増す。この型のジャンプはもぐり内部ジャンプと名づけられよう (submerged internal hydraulic jump: Stefan [11])。これらの実験例の叙述の詳しくは、Stefan and Hayakawa [1] 参照。

$\gamma = 90^\circ$ と 23° の実験結果には大差を認められなかったが、 $\gamma = 5.75^\circ$ の場合には上層流がビーチの途中で剝離し、水深の変化がほとんどなく混合が無視できる状況が多く観測された。

3. 理論

この節では混合を伴う内部ジャンプとしてのモーメント方程式を導き、その解を検討する。もぐり内部ジャンプはここでは扱われていず、また空気中への熱損失は無視されている。コントロールボリュームは導入水路端から下流の混合が無視できる量になる点までを考える。上層と下層についてモーメント方程式は各々次のように書ける。(図-2 参照)

$$\beta_1 \frac{\bar{\rho}_1 q_1^2}{h_1} - \beta_0 \frac{\rho_0 q_0^2}{h_0} = \frac{1}{2} \rho_0 g h_0^2 - \frac{1}{2} \bar{\rho}_1 g h_1^2 + \frac{(h_r - h_2)}{2} (\rho_0 g h_0 + \bar{\rho}_1 g h_1) \dots\dots\dots (1)$$

$$\beta_2 \frac{\bar{\rho}_2 q_2^2}{h_2} = \rho_0 g h_0 h_r + \frac{1}{2} \bar{\rho}_2 g h_2^2 - \bar{\rho}_1 g h_1 h_2 - \frac{1}{2} \bar{\rho}_2 g h_2^2 - \frac{(h_r - h_2)}{2} (\rho_0 g h_0 + \bar{\rho}_1 g h_1) \dots\dots\dots (2)$$

ここで $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ はモーメント補正係数であり、 ρ は密度、 h は水深、 q は単位巾当りの流量、 g は重力加速度をあらわすものである。添字 0、1、2 は上流側上層、下流側上層、下流側下層をそれぞれあらわし、横線は各層の平均量をあらわす。 h_r は冷水水深である。

モーメント方程式(1)、(2)を導くに当って用いられた主な仮定は次のようなものである。

- 1) 下層から上層へ混合される流体は無視できる程度の水平方向モーメントを輸送する。
 - 2) 境界面の平均圧力は上下流側の圧力の平均値をとる。
 - 3) 上流側の壁面の圧力は静水圧分布で近似される。
- 以上の仮定のうち 1) および 3) は混合量零の時厳密になりたつものであり、この解析が混合量の少ない時に適用されるべきものであることを示している。仮定 2) は Yih and Guha によるものであり、この解析が

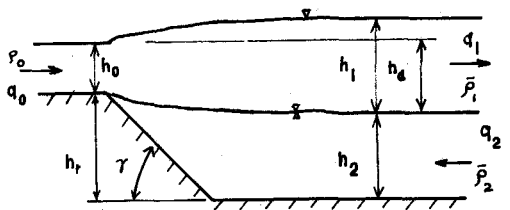


Fig. 2 Definition sketch

混合量零の時 Yih and Guha の結果と合致することを示すものである。

方程式(2)は次のように書き換えられる。

$$2\beta_2 \frac{\bar{\rho}_2 q_2^2}{h_2(h_2+h_r)} = \rho_0 g h_0 - \bar{\rho}_1 g h_1 + \bar{\rho}_2 g (h_r - h_2) \dots\dots\dots (3)$$

この式で左辺を零でおきかえた式と、方程式(1)と(2)を加え合せたものは Stefan and Hayakawa の基本方程式であり、これから彼等の結果はこの解析の $q_2=0$ か $h_r \rightarrow \infty$ の場合であることがわかる。連続の方程式と非圧縮性を表わす式は次のように書ける。

$$\rho_0 q_1 + \bar{\rho}_2 q_2 = \bar{\rho}_1 q_1 \dots\dots\dots (4)$$

$$q_0 + q_2 = q_1 \dots\dots\dots (5)$$

方程式(4)、(5)から次式がさらに導かれる。

$$\Delta \rho_0 q_0 = \Delta \rho_1 q_1 \dots\dots\dots (6)$$

ここで $\Delta \rho_0 = \bar{\rho}_2 - \rho_0$ および $\Delta \rho_1 = \bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1$ 。 方程式(1)、(3)から方程式(5)、(6)を用いて q_2 と $\Delta \rho_1$ を消去し、無次元化された式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} rF_0^2 \left\{ \beta_1 \left(1 - \frac{r}{Q}\right) \frac{Q^2}{H_1} - \beta_0(1-r) + \beta_2 \frac{(Q-1)^2}{H_2} \right\} &= \frac{(1-r)}{2} + (1-r)H_r + \frac{H_r^2}{2} \\ -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{Q}\right) H_1^2 - \left(1 - \frac{r}{Q}\right) H_1 H_2 - \frac{H_2^2}{2} &\dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$2\beta_2 r F_0^2 \frac{(Q-1)^2}{H_2(H_2+H_r)} = 1-r - \left(1 - \frac{r}{Q}\right) H_1 + H_r - H_2 \dots\dots\dots (8)$$

ここで $Q = q_1/q_0$ 、 $H_1 = h_1/h_0$ 、 $H_2 = h_2/h_0$ 、 $H_r = h_r/h_0$ 、 $r = \Delta \rho_0/\bar{\rho}_2$ 、 $F_0 = q_0/\sqrt{rg h_0^3}$ 。

方程式(7)および(8)から H_r を消去すれば次のように書かれる。

$$\begin{aligned} H_2 \left[(1-r)(Q-r) - (H_d-r)^2 + \beta_2 4F_0^2 \frac{(Q-1)^2 \{Q(H_d-r) + (Q-r)H_2\}}{H_2(H_d+2H_2-1)} - 4rF_0^4 \frac{Q(Q-1)^4 \beta_2^2}{H_2^2(H_d+2H_2-1)^2} \right] \\ 2F_0^2 = \frac{(Q-r) [\beta_2(Q-1)^2 + \frac{\beta_1 H_2 (Q-r)^2}{H_d-r-2rF_0^2 \frac{(Q-1)^2 \beta_2}{H_2(2H_2+H_d-1)}} - \beta_0(1-r)H_2] }{\dots\dots\dots} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで $H_d \equiv h_d/h_0 \equiv H_r + 1 - H_2$ 。

方程式(9)において密度フルード数 F_0 と水深比 H_2 は主な独立変数であり、流量比 Q と水深比 H_d は主な従属変数であるとみなせる。方程式(9)は与えられた条件、たとえば h_0 、 h_r 、 h_2 および q_0 に対して解を完全に与えることができなく、流量比 Q と水深比 H_d との間の関係を与えるに過ぎない。現象の完全な解を与えるためには積分されたモーメント方程式だけでは不十分であり、混合の機構をさらに詳しく知ることが必要である。内部ジャンプによる自由表面の隆起は次式で与えられる。

$$W \equiv \frac{H_1 - H_d}{r} = \frac{1}{Q - r} \left[H_d - Q - 2\beta_2 F_0^2 \frac{Q(Q-1)^2}{H_2(2H_2 + H_d - 1)} \right] \dots\dots\dots (10)$$

式(10)は水面の隆起は r のオーダーであることを示している。式(10)で混合のない場合($Q=1$)は椎貝[7]によってはじめて与えられた。無次元数 r は工学的には非常に小さく $10^{-2} \sim 10^{-3}$ のオーダーであるので、以下の解析には無視される。式(9)は $Q=1$ の場合、 H_d について解くことができ次のように表わされる。

$$H_d = 1 \dots\dots\dots (11a)$$

または

$$H_d = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}) \dots\dots\dots (11b)$$

式(11b)はYih and Guhaの混合を伴わない内部ジャンプの解に一致する。式(9)は一般に Q に関する三次方程式であり、密度フルード数 F_0 が $F_{0m} < F_0 < F_{00}$ の時1より大きい2根を有し、 $F_0 > F_{00}$ の時1より大きい根は1個有する。ここで F_{0m} は H_d と Q の関数として求めることができる1より大きい量であり、 F_{00} は式(11b)で与えられる。 F_{0m} の意義は図-3、図-4の式(9)を数値計算してプロットした曲線によって明かなように H_d 一定の時最小の F_0 である。図-3、図-4において $F_1=1$ の線は下流の密度フルード数 $F_1 \equiv F_0(Q^3/H_d^3)^{1/2}$ が1になる線であり、図-3では与えられた H_d 値に対して Q が $F_1=1$ と接する値以下、図-4では与えられた Q 値に対して H_d が $F_1=1$ と交わる値以上の範囲が $F_1 < 1$ を与える。その範囲において両図から明かなように、与えられた F_0 、 H_2 および Q または H_d に対して式(9)を同時に満足する二個のそれぞれ H_d または Q の値が存在する。そのいずれの値が実際に観測されるかは、今のところ実験結果によってのみ明らかにせねばならない。図-3、図-4は $H_2 = \infty$ の場合の計算であるが、以上の結論は H_2 が1より大きく $H_d < 2H_2 + 1$ の時に常に成立する。

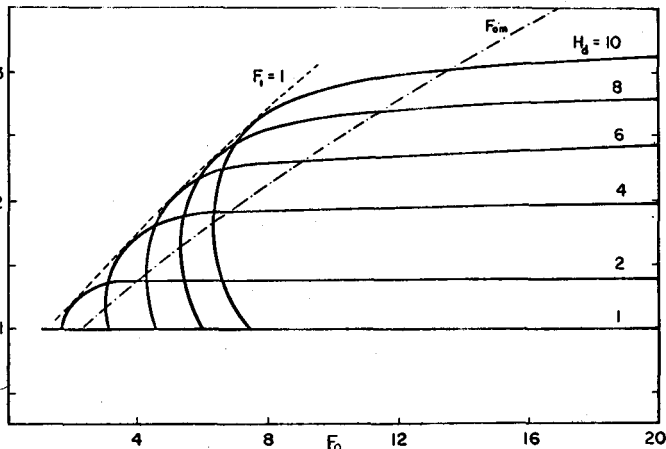


Fig. 3 Q vs. F_0 ($H_2 = \infty$)

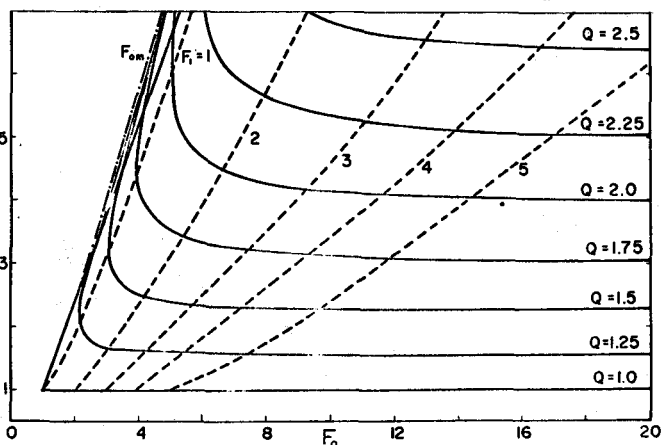


Fig. 4 H_d vs. F_0 ($H_2 = \infty$)

4. 実験データとの比較

$r = 90^\circ$ の実験結果の流量比 Q と水深比 H_d が図-5、図-6に与えられている。実験データはすべて H_2 が3.5から13.5の範囲で行なわれた。図-6は H_d が混合のため増加することを示しており、

岩崎および上原の報告に一致する。図-5には前節の理論曲線が H_2 の平均値8に対して描いてあるが、理論曲線と小さい Q 値のデータとの照合は比較的よい。図-5の理論曲線は Q が F_{0m} との交点より小さい値の部分が大部分であり、このことから前節では未解決であった二個の Q または H_d 値は小さい Q 値（または大きい H_d 値）をとるべきであることがわかる。

図-5、図-6にはもぐり内部ジャンプの実験結果が与えられ、通常の内部ジャンプ（自由内部ジャンプ、free internal hydraulic jump）より大きい H_d 値をとることがわかる。もぐり内部ジャンプの解析はもぐり水深が新しいパラメーターとなる困難がある。

Fig. 5 Experimental data, Q vs F_0 . (Flags for submerged jump)

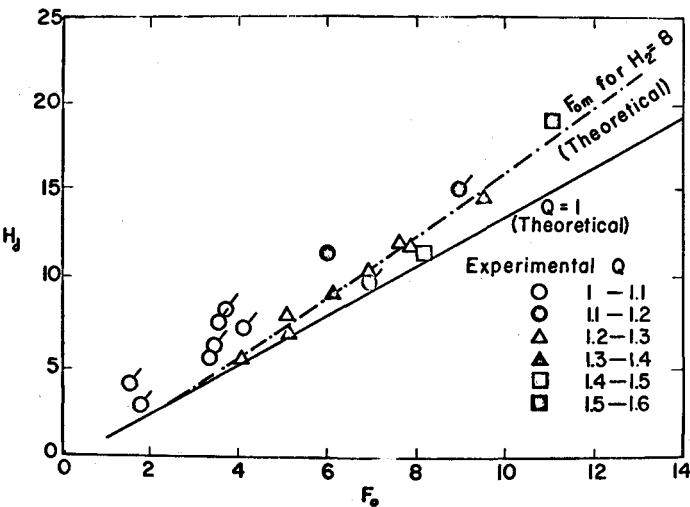
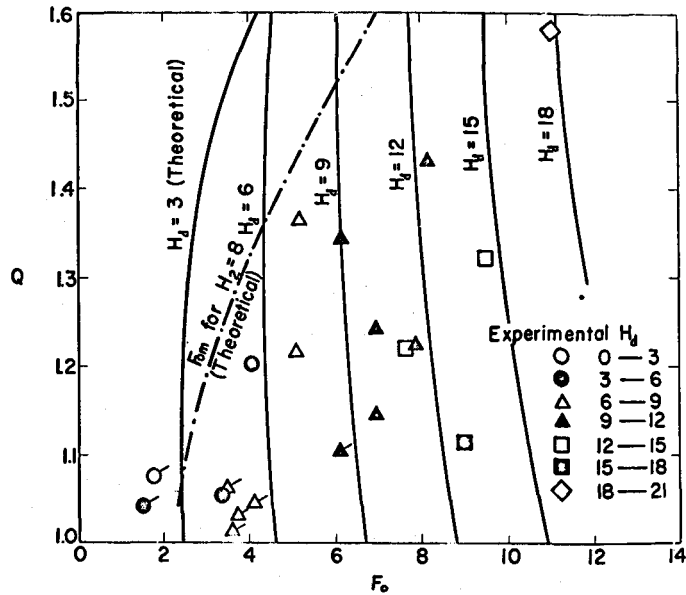


Fig. 6 Experimental data, H_d vs F_0 .

5. 謝 辞

この報告の作成にあたって東京大学講師玉井信行氏をはじめ同大学土木工学科河川工学研究室の助けを受けた。ここに記して謝意を表したい。ここに報告された研究は Environmental Protection Agency, U.S. Department of Interior の支持によるものである。

参考文献

1. Stefan, H. and Hayakawa, N., "Mixing induced by an internal hydraulic jump", Water Resources Bulletin, Vol. 8, No. 3, (1972) pp. 531-545.
2. Schijf, J. B. and Schönfeld, J. C., "Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water", Proc. Minn. International Hydr. Conv. IAHR, (1953).
3. Yih, C. S. and Guha, C. R., "Hydraulic jump in a fluid system of two", Tellus, Vol. 7, No. 3, (1955).
4. Hayakawa, N., "Internal hydraulic jump in co-current stratified flow", Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM-5, (1970).
5. 岩崎敏夫, "密度流の諸問題", 水工学シリーズ 66-15, (1966).
6. 浜田徳一, "内部ジャンプについて," 第5回海岸工学講演会講演集, (1958).
7. 椎貝博美, "Some aspects and experiments on the density current", Trans. JSCE, No. 83, July, (1962).
8. 岩崎敏夫、上原忠保, "インターナルジャンプの変動スペクトルに関する研究", 第18回海岸工学講演会論文集, (1971).
9. Wood, I. R., "Horizontal two-dimensional density current", Journal of Hydraulics Div., Proc. ASCE, Vol. 96, No. HY2, (1967).
10. Wilkinson, D. L. and Wood, I. R., "A rapidly varied flow phenomenon in a two-layer flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 47, (1971).
11. Stefan, H., "Stratification of flow from channel into deep lake", Journal of Hydraulics Division, Proc. ASCE, Vol. 96, No. HY7, (1970).