界面内波の干渉について

正会員　　浜田徳一

界面内波の粘性を考慮した取扱いとして，筆者[1]は河海両水の界面の内波について，粘性境界層の性質を調べ，それが大きな境界層Reynolds 数に対して，不安定となり得る可能性のあることを指摘した。しかし今１つの立場として，非粘性問題のままでも，波長の長い界面内波が短波長の界面内波に対し，流れの様に作用して，短波長の内波がKelvin-Helmholtz 不安定を生じ,これによって界面不安定が生じ得るのではないかと言う推論がある。今回の計算はこの問題に対する検討である。

1. 界面内波の２次干渉

静止した界面を$y=0$とし，波の進行方向にx軸をとり，垂直上向きにy軸をとる。両流体の厚さは十分大いとし，上部流体の密度$\rho^{(1)}$, 速度ポテシャル$\phi^{(1)}$ ($u^{(1)}=\dfrac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}$, $v^{(1)}=\dfrac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}$)，下部流体のそれ等を$\rho^{(2)}$, $\phi^{(2)}$($u^{(2)}=\dfrac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}$, $v^{(2)}=\dfrac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}$) として，１次近似および２次近似について次の力学的および運動学的関係が成立する。[2]

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial t}+\rho^{(1)}g\eta_1=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial t}+\rho^{(2)}g\eta_1 \tag{1-1}$$

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial t}+\rho^{(1)}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial t\,\partial y}\eta_1+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y}\right)^2+\rho^{(1)}g\eta_2$$

$$=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial t}+\rho^{(2)}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial t\,\partial y}\eta_1+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\right)^2+\rho^{(2)}g\eta_2 \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}=\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y} \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\,\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1 \tag{2-2}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}=\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y} \tag{3-1}$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\,\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1 \tag{3-2}$$

（1－1），（2－1），（3－1）式は１次近似に関するものであり，（1－2），（2－2），（3－2）式は２次近似に関するものである。

この計算を行うと１次近似について次の関係が成立する。

$$\eta_1=a_1\cos k_1(x-c_1t)+a_2\cos k_2(x-c_2t)\ (a_1,\ a_2>0\text{とする。}) \tag{4}$$

$$\phi_1^{(1)}=-c_1a_1\ell^{-k_1y}\sin k_1(x-c_1t)-c_2a_2\ell^{-k_2y}\sin k_2(x-c_2t) \tag{5-1}$$

$$\phi_1^{(2)}=c_1a_1\ell^{k_1y}\sin k_1(x-c_1t)+c_2a_2\ell^{k_2y}\sin k_2(x-c_2t) \tag{5-2}$$

ただしk_1，$k_2 > 0$とし，$k_1 > k_2 > 0$とする。c_1，c_2は正負いずれの符号もとるものとする。位相速度c_1，c_2は

$$c_1 = \pm \left\{ \frac{g}{k_1} \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad , \quad c_2 = \pm \left\{ \frac{g}{k_2} \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

つぎに２次近似については計算の結果

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \frac{1}{2} \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} k_1 a_1^2 \cos 2k_1 (x - c_1 t) + \frac{1}{2} \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} k_2 a_2^2 \cos 2k_2 (x - c_2 t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} (k_1 + k_2) a_1 a_2 \cos \{ (k_1 + k_2) x - (k_1 c_1 + k_2 c_2) t \} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} (k_1 - k_2) a_1 a_2 \cos \{ (k_1 - k_2) x - (k_1 c_1 - k_2 c_2) t \} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(1)} = & - k_1 c_1 a_1^2 \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} \ell^{-2k_1 y} \sin 2k_1 (x - c_1 t) - k_2 c_2 a_2^2 \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} \ell^{-2k_2 y} \sin 2k_2 (x - c_2 t) \\ & - a_1 a_2 (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} \ell^{-(k_1 + k_2) y} \sin \{ (k_1 + k_2) x - (k_1 c_1 + k_2 c_2) t \} \\ & - a_1 a_2 \frac{k_1 c_1 \rho^{(1)} + k_2 c_2 \rho^{(2)}}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} \ell^{-(k_1 - k_2) y} \sin \{ (k_1 - k_2) x - (k_1 c_1 - k_2 c_2) t \} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(2)} = & - k_1 c_1 a_1^2 \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} \ell^{2k_1 y} \sin 2k_1 (x - c_1 t) - k_2 c_2 a_2^2 \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} \ell^{2k_2 y} \sin 2k_2 (x - c_2 t) \\ & - a_1 a_2 (k_1 c_1 + k_2 c_2) \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} \ell^{(k_1 + k_2) y} \sin \{ (k_1 + k_2) x - (k_1 c_1 + k_2 c_2) t \} \\ & - a_1 a_2 \frac{k_2 c_2 \rho^{(1)} + k_1 c_1 \rho^{(2)}}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} \ell^{(k_1 - k_2) y} \sin \{ (k_1 - k_2) x - (k_1 c_1 - k_2 c_2) t \} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで２次近似の干渉項によるk_1波の位相速度の変化を考える。$\dfrac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} + \rho^{(1)}} = \varepsilon$　とおき
$\eta = \eta_1 + \eta_2$　を計算すると　$\sigma_1 = k_1 c_1$，$\sigma_2 = k_2 c_2$として

$$\begin{aligned} \eta = & a_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon a_1 k_1 \cos (k_1 x - \sigma_1 t) + \varepsilon a_2 k_2 \cos (k_2 x - \sigma_2 t) \right\} \cos (k_1 x - \sigma_1 t) \\ & - a_1 \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon a_1 k_1 \sin (k_1 x - \sigma_1 t) + \varepsilon a_2 k_1 \sin (k_2 x - \sigma_2 t) \right\} \sin (k_1 x - \sigma_1 t) \\ & + a_2 \cos (k_2 x - \sigma_2 t) + \frac{1}{2} \varepsilon a_2^2 k_2 \cos 2 (k_2 x - \sigma_2 t) \end{aligned} \tag{10}$$

右辺最後の２項はk_2 波のみに関するものであるからこれを除外して考える。

$$\left. \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} \varepsilon a_1 k_1 \cos (k_1 x - \sigma_1 t) + \varepsilon a_2 k_2 \cos (k_2 x - \sigma_2 t) = \gamma \cos \theta \\ & \frac{1}{2} \varepsilon a_1 k_1 \sin (k_1 x - \sigma_1 t) + \varepsilon a_2 k_1 \sin (k_2 x - \sigma_2 t) = \gamma \sin \theta \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

とおき

$$\left.\begin{array}{l}\tan\,\theta=\dfrac{\frac{1}{2}\varepsilon a_1k_1\ \sin\ (k_1\ x-\sigma_1\ t)+\varepsilon a_2 k_1\ \sin\ \ (k_2 x-\sigma_2\ t)}{1+\frac{1}{2}\ \varepsilon a_1 k_1 \cos\,(k_1\ x-\sigma_1 t)+\varepsilon a_2 k_2 \cos\,(k_2 x-\sigma_2 t)}\end{array}\right\}\qquad(12)$$

$$\gamma=\Big[\ \{\ 1+\frac{1}{2}\ \varepsilon a_1 k_1 \cos\,(k_1 x-\sigma_1 t)+\varepsilon a_2 k_2 \cos\,(k_2 x-\sigma_2 t)\}^2$$

$$+\{\frac{1}{2}\varepsilon a_1 k_1 \sin\ (k_1 x-\sigma_1 t)+\varepsilon a_2 k_1\ \sin\,(k_2 x-\sigma_2 t)\}^2\Big]^{\frac{1}{2}}\qquad(13)$$

ここで　$a_2\simeq a_1$ ，$k_1 \gg k_2$　を仮定すると，(12) 式は

$$\theta\fallingdotseq\ \frac{1}{2}\ \varepsilon a_1 k_1\ \sin\ (k_1 x-\sigma_1 t)+\varepsilon a_2\ k_1\ \sin\ (k_2\ x-\sigma_2\ t)\qquad(14)$$

また(10)，(11)式より　$\eta=a_1\gamma\ \cos\,(k_1\ x-\sigma_1 t+\theta)$ において，波数kは　$k=k_1+\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ により，周波数σは　$\sigma=\sigma_1-\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$　により表わされる。(14)式を用い $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $-\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ を求め，この場合の波速 c は

$$c=\sigma/k=\frac{\sigma_1+\frac{1}{2}\varepsilon a_1\ k_1\ \sigma_1\ \ \cos\,(k_1 x-\sigma_1\ t)+\varepsilon a_2 k_1 \sigma_2\ \cos\,(k_2 x-\sigma_2\ t)}{k_1+\frac{1}{2}\varepsilon a_1 k_1^2\ \ \cos\ (k_1 x-\sigma_1 t)+\varepsilon a_2 k_1 k_2\ \cos\,(k_2\ x-\sigma_2\ t)}\qquad(15)$$

これを計算すると

$$\begin{aligned}c&=\frac{\sigma_1}{k_1}+\varepsilon\,(a_2\sigma_2-a_2\ \sigma_1\frac{k_2}{k_1})\cos\,(k_2\ x-\sigma_2\ t)\\&=c_1+\varepsilon a_2 k_2\,(c_2-c_1)\cos\,(k_2 x-\sigma_2 t)\\&=u_2\,(\text{at interface})\,\varepsilon\,(1-\frac{c_1}{c_2})+c_1\end{aligned}\qquad(16)$$

ただしu_2 (at interface) としては (5 − 2) 式による下層流体における波数k_2 のものをとった。さて上層流体が−U，下層流体が+Uで流れる時，波数k_1 の界面内波の波速は

$$c^1=\varepsilon\mathrm{U}\pm\ \sqrt{c_1^2-\frac{4\rho^{(1)}\rho^{(2)}\mathrm{U}^2}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}}\qquad(17)$$

(16) 式において，$|c_1|\ll|c_2|$ であるから，(17)式の右辺第1項は現在の計算により誘導せられている。しかし(17)式の根号中の第2項は現われない。この根号中の第2項が Kelvin-Helmholtz 不安定を生ずる要素であるが，この項は $\rho^{(1)}=0$ で消失する。第3近似まで求めたときの c_1の補正項は ($k_1-k_1+k_1$，$\sigma_1-\sigma_1+\sigma_1$)，($k_2-k_2+k_1$，$\sigma_2-\sigma_2+\sigma_1$)の2つの干渉項より現われてくることになるが，これ等はいずれも $\rho^{(1)}=0$ において消失しない。[3] しかもこれ等の2次，3次の干渉計算の結果は表面波の場合ある程度実験により支持せられている。[4][5]

これ等のことより界面内波の干渉により短波長の波にKelvin - Helmholtz 不安定が生ずるのは困難であろう。

2. 界面内波の質量輸送とエネルギーとの関係

一般流が存在しないときの非粘性の界面内波の質量輸送は1次近似において上層流体で

$$M^{(1)}=\frac{1}{2}a_1^2\,k_1\,\rho^{(1)}c_1$$

下層流体で $M^{(2)}=\frac{1}{2}a_1^2\,k_1\,\rho^{(2)}c_1$

他方波動のエネルギーは単位長さ当り

$$E=\frac{1}{2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})g\,a_1^2$$

したがって

$$M^{(1)}c_1+M^{(2)}c_1=Mc_1=E \tag{18}$$

が明かに成立する。(18) 式が成立することは, J. W.Miles[6]が用いた風波発生の不安定理論, ないしはそれに類似した方法が, 一般流を適当に設定すれば界面内波の増巾機構として用い得ることを示している。[7](18) 式は多数の波数の界面内波が存在するときも1次近似として成立する。たとえば (16) 式の c の様な見かけの波速が得られればそれから右辺第1項をひいて c_1 を用いればよい。

これに対し上層流体が一様な速度$U^{(1)}$, 下層流体が一様な速度$U^{(2)}$で流れるときの界面内波の特性式は波速を c として

$$k\rho^{(1)}(c-U^{(1)})^2+k\rho^{(2)}(c-U^{(2)})^2-(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})g=0 \tag{19}$$

$$c=\frac{\rho^{(1)}U^{(1)}+\rho^{(2)}U^{(2)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\pm\sqrt{\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\frac{g}{k}-\frac{\rho^{(1)}\rho^{(2)}(U^{(1)}-U^{(2)})^2}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}} \tag{20}$$

(19),(20)式の場合の質量輸送と波のエネルギーとの関係は (20)式のcが実数の場合と, 根号中が負となり c が複素数となった場合とで区別せられる。c が実数の場合は質量輸送は上部流体である断面をよぎって

$$M^{(1)}=\frac{1}{2}a^2k\,\rho^{(1)}(c-U^{(1)})$$

下部流体で $M^{(2)}=\frac{1}{2}a^2k\,\rho^{(2)}(c-U^{(2)})$

波動のエネルギーは単位長さ当り

$$E=\frac{1}{2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})g\,a^2$$

よって (19) 式を用い

$$M^{(1)}(c-U^{(1)})+M^{(2)}(c-U^{(2)})=E \tag{21}$$

が1次近似において成立する。(21) 式は$U^{(1)}=U^{(2)}=0$ の場合は (18) 式に還元せられるが, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$

のいずれか1つでも0でないときは(6)式の c_1 の表現,(20)式の c の表現からわかる通り,(18)式と(21)式とは一致せず,(18)式と(21)式とは異った種類の波を示している。(18)式で表現せられる波が他の同様の波の干渉をうけて(21)式の形式を満足する様に変化することは考えられない。また上記の2種類の波では波のポテンシャルエネルギーと運動のエネルギーとは同量である。

つぎに(20)式の根号中が負となり, $c = cr \pm i\, ci$ で表現せられるときの増巾中の波の質量輸送の計算を行うと,上層流体について

$$M^{(1)} = -\frac{1}{2} a^2 k \rho^{(1)} \rho^{(2)} \frac{U^{(1)} - U^{(2)}}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} e^{2kcit}$$

下層流体について

$$M^{(2)} = \frac{1}{2} a^2 k \rho^{(1)} \rho^{(2)} \frac{U^{(1)} - U^{(2)}}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}} e^{2kcit}$$

すなわち質量輸送の絶対値は上下両流体で同じであるが,その方向は反対であり

$$M^{(1)} + M^{(2)} = M = 0 \qquad (22)$$

また波の運動エネルギーは単位長さあたり

$$Ek = \frac{1}{4} (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) g a^2 e^{2kcit} + \frac{1}{2} (\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) a^2 k\, ci^2\, e^{2kcit}$$

波のポテンシャルエネルギーは

$$Ep = \frac{1}{4} (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) g a^2 e^{2kcit}$$

故に全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) g a^2 e^{2kcit} + \frac{1}{2} (\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) a^2 k\, ci^2\, e^{2kcit} \qquad (23)$$

この $c_i \neq 0$ の場合の(22),(23)式のMとE との関係は(18),(21) 両式とは明かに異った種類の波であることを示して居り,(18)式を満足する波の相互干渉により(22)式を導くことは考えられない。

以上の結果から筆者は長い波長の界面内波が短波長の波に一般流と同様の作用を及ぼし,短波長の波にKelvin - Helmholtz 不安定が生じ,界面不安定が形成せられるという考えに深い疑問を持つ。現実には粘性流体としての界面内波の粘性境界層を考え,その中での振動が増巾されるかどうかを検討すべきであろう。

参　考　文　献

(1) Hamada, T. ; The problems of density curent , part I . Report No. 14, Port & Harbour Research Institute , 1967。

(2) (1)に同じ

(3) Longuet - Higgins, M. S. & Q. M. Phillips ; Phase velocity effects in tertiary wave interactions, Journal of Fluid Mech., Vol. 12, 1962.

(4) Hamada, T.; The secondary interactions of surface waves, Report. No. 10, Port & Harbour Research Institute, 1965.

(5) Mc Goldrick, L. F., O. M. Phillips, N. E. Huang & T. H. Hodgson; Measurement of third - order resonant wave interactions, Journal of Fluid Mech., Vol.. 25, 1966

(6) Miles, J. W.; On the generation of surface waves by shear flows, Journal of Fluid Mech., Vol. 3, 1957

(7) Hamada, T.; The problems of density currents, Part Ⅱ., 港湾技術研究所報告 8 巻 4 号, 1969。