

成層流境界面における内部波及び混合の特性に関する一考察

東京大学 工学部 正員 ○玉井信行

東京大学 大学院 西村 司

序

ここで述べる内部波特性とは、二層流境界面の中立位置よりの変位特性を意味し、混合の特性は弱い混合状態の場合に対する考察を述べる。混合は、境界面付近の乱れ速度の特性に依存すると考えられるが、弱い混合状態の場合には乱れ速度のスペクトル測定例も報告されている。内部波に関して従来行なわれてきた研究を、こうした観点から以下に掲げる5つに分類した。記入した文献は全てを網羅するものではないが、主題に含まれる内容を具体化するために掲げた。

安定論 Helmholtz¹⁾, Kelvin²⁾, Taylor³⁾, Miles⁴⁾, Howard⁵⁾ (a)

Drazin and Howard⁶⁾, Keulegan⁷⁾, 浜田⁸⁾

混合特性

(i) 混入速度、界面での鉛直拡散係数、連行係数 (b)

Keulegan⁷⁾, Ellison and Turner⁹⁾, 岸・加藤¹⁰⁾, Minami¹¹⁾, 和田・片野¹²⁾,

須賀・高橋¹³⁾, 椿・小松¹⁴⁾

(ii) 乱れ速度のスペクトル Lumley¹⁵⁾, 岩崎・阿部¹⁶⁾ (c)

内部波

(i) 変位スペクトル (d)

弱混合型 Phillips¹⁷⁾, 椿・浜村・橋本¹⁸⁾, 岩崎・阿部¹⁹⁾, 和田・片野²⁰⁾

非混合型 井上²¹⁾, 日野・谷²²⁾

(ii) 波高分布 岩佐・井上・竹林²³⁾, 西村²⁴⁾ (e)

ここで報告するのは、(a)と(c)を用いた(b)に関する考察と、乱れ速度の周波数パワースペクトルに対する考察、及び(e)に関する測定結果の紹介である。

I. 混合特性

Drazin and Howard⁶⁾は無限領域を対象に噴流型、剪断流型の二種の速度分布形に対して安定条件を求めた。実験室等で見られる流れの場は有限域であるが、自由表面においては剪断力が消失することを考えると、そのような流れは噴流型の速度分布を有する半無限域の流れに最も近いと考えられる。噴流型の速度分布を有する成層流の安定限界は次式で与えられる。

$$J = \alpha' / (1 \pm \lambda(0)) \text{ の大なる方. } (1)$$

ここに、 J は上層を代表するリチャードソン数、 α' は無次元波数($\alpha' = kL$)、 L は速度分布を有する層の厚さ、 k は波数である。 ρ_0 を水表面での密度、 $\Delta\rho$ を上層と下層の最大密度差とすれば、

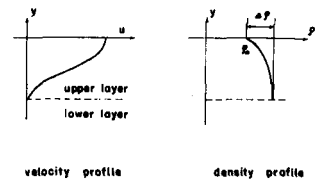


図-1 流れの場の模式図

$$\lambda(0) = \ln[(1 + \Delta\rho/\rho_0)(1 - \Delta\rho/\rho_0)] / \ln[(1 + \Delta\rho/\rho_0)/(1 - \Delta\rho/\rho_0)] \quad (2)$$

この場合の J の定義は、密度差が微小であると考えたと $J = (\Delta\rho/\rho_0) g L / V^2$ (V は代表流速) となる。 $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$ の場合には $\lambda(0) = -(1/2)(\Delta\rho/\rho_0)$ と近似でき、通常の実験では 1% 以下であるから、安定限界を与える (1) 式は次式で近似できる。

$$J = k_m L. \quad (3)$$

従って、安定な波数の最大値 k_m は次式で与えられる。

$$k_m = J / L. \quad (4)$$

Lumley¹⁵⁾ は浮力の影響を受ける波数域でのスペクトルを、スペクトル形が乱れのエネルギーの輸送のみによって決定されると仮定して次のように求めた。

$$\left. \begin{aligned} P_V(k) &= A \varepsilon_0^{2/3} \{1 + (k/k_b)^{-4/3}\} k^{-5/3}, \\ k_b &\equiv C^{3/4} N^{3/2} \varepsilon_0^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに A : 普遍定数 ($= 1.44$), ε_0 : 粘性によるエネルギー逸散率, C : 乱流プラントル数の逆数 (~ 1.5), $N \equiv (-g\rho^{-1}\partial\rho/\partial y)^{1/2}$: ブルント・バイセラ振動数である。 $k \gg k_b$ の慣性中間領域では $-5/3$ 乗則が成立する。一方、 $k \ll k_b$ である浮力中間領域では (5) 式は次のようになる。

$$P_V(k) = A C N^2 k^{-3}. \quad (6)$$

k_b のオーダーを推定するために、等方性の仮定 $\varepsilon_0 = 15 \overline{u'^2}/\lambda_y^2$ と岩崎・阿部¹⁶⁾ の測定結果を用いる。CGS 単位系で $\lambda_y \sim 0.2$, $(\overline{u'^2})^{1/2} \sim 0.5$ であって $\varepsilon_0 \sim 1$ である。通常 $\Delta\rho/\rho \sim 0.01$, $L \sim 10$ であるから $N \sim 1$ であり、(5) 式により $k_b \sim 1$ となる。(4) 式で与えられる k_m は J の不安定限界を $1/4$ とすれば 0.025 となり、 k_b よりかなり小さく充分 (6) 式の適用範囲にある。 k_m より大きな波数を与える波は不安定で混合に関与すると考えられる。そうした波群の有するエネルギーの総和は (6) 式を用いて次のように求められる。

$$E_M = \int_{k_m}^{\infty} A C N^2 k^{-3} dk = \frac{1}{2} A C N^2 k_m^{-2} \quad (7)$$

積分の上限は k_b であるが、 $k_m \ll k_b$ であり、エネルギー密度は急速に減衰するから浮力中間領域の上限でエネルギー密度が零となる形式とした。上下層の密度差が小さい場合には、上層の代表値として $N = V J^{1/2} / L$ と近似できるから、(7) 式は (4) 式を用いて次のように変形できる。

$$E_M = 1/2 \cdot A C V^2 J^{-1} \quad (8)$$

従って、無次元化された混合に関与する乱れエネルギー E_M / V^2 は、弱い混合の場合には J^{-1} に比例すると考えられる。

II. 乱れエネルギーの周波数スペクトル

乱れ速度は、非常に大きな領域における現象でないかぎり内部波変位と密接な関係があると思われる。従って、乱れ速度を支配する物理量は内部波変位の場合と同じく、非混合型では $(\Delta\rho/\rho) g$ であり、混合型ではブルント・バイセラ振動数であると考えられる。

(1) 非混合型 …………… 乱れ速度の周波数スペクトルは、次元的考察より次式で与えられる。

$$P_V(n) = C (\Delta\rho/\rho \cdot g)^2 n^{-3} \quad (9)$$

(Ⅱ) 混合型…………… N の次元は T^{-1} であり、長さの代表スケールが不足する。長さのスケールを含むパラメータとしては、乱れエネルギーの逸散率 ϵ_0 と動粘性係数 ν の両者が考えられるが、成層流においては浮力の影響を受けるので乱れの波長は長くなることが予測され、浮力中間領域により近い慣性中間領域を代表する量を補助パラメータに選ぶのが妥当と思われる。関与する物理量が N と ϵ_0 の二つになると、次元解析のみでは周波数のべき数を決定できず、この決定には実験結果を導入し、 ϵ_0 と N のべき数を定めると、周波数スペクトルは (10) 式で与えられることになる。

$$P_V(n) = C \epsilon_0 N^3 n^{-5} \quad (10)$$

n^{-5} に比例する結果は、岩崎・阿部¹⁶⁾が内部フルード数 0.58 の実験において境界面付近で観測している。内部フルード数の値から判断すると全般的には混合型ではない、と考えられるが、境界面付近には密度勾配が存在しているものと思われるのでこの結果を用いた(図-2 参照)。同じ図で、境界面から離れると n^{-3} に比例するスペクトル形が報告されており、これは (9) 式で示される非混合型に対応するものと考えられる。

等方性乱流の場合と相似と考えれば $\epsilon_0 = C_1 \nu \overline{u'^2} / \lambda_y^2$ であるから

$$P_V(n) = CC_1 (\nu \overline{u'^2} / \lambda_y^2) N^3 n^{-5} \quad (11)$$

である。岩崎・阿部の実験結果をみると $x = 10 \text{ cm}$ において $P_V(n)$ が急激に殖え、その後は漸増している。流入点 ($x=0$) での測定値に比し、 $x = 10 \text{ cm}$ では $\overline{u'^2}$ が増加し λ_y が減少しているので妥当な結果である。 $x = 20 \text{ cm}$ では両者共に増大している。また $x = 30 \text{ cm}$ を越えると $\overline{u'^2}$ は減少し始め、 λ_y も増大している。(11) 式の形よりみて、この領域では N が増大していることが予測され、これは流下に伴ない境界面が安定し、二層の分離が明瞭になる実験の状態と定性的に一致すると考えられる。

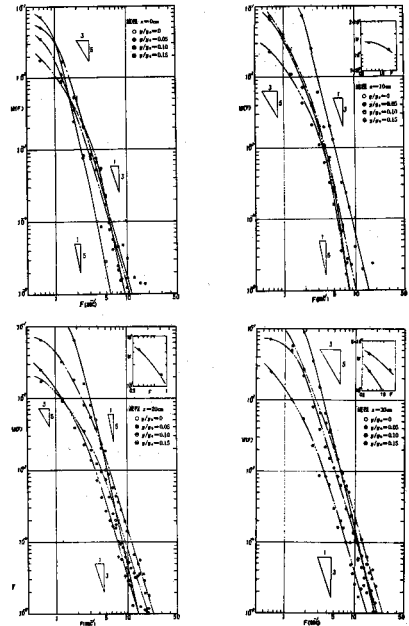


図-2 乱れのスペクトル
(岩崎・阿部¹⁶⁾)

Ⅲ. 内部波の波高分布

岩佐・井上・竹林²³⁾は内部フルード数 0.63 の場合の実験を行ない、波高分布はレイリイ分布に余り良く適合しないと述べている。西村²⁴⁾は内部フルード数 0.895, 0.708 の場合の実験結果よりレイリイ分布との適合がかなり良いことを見出しているので報告する。

実験装置及び方法 測定を行なった水路は長さ 3 m、高さ 1 m、幅 0.2 m の測定部に深さ 0.8 m に至るまで塩水を貯え、流量平滑用の水槽からベルマウス部を通して開水路形式で淡水を流すものである。上層の水深の制御は、水路下流端のゲートにより行なった。波高計は直径 1.0 mm、長さ 21 cm のキルシネル鋼線を約 1.1 cm の間隔に張ったものを用いた。上下二層の境界面の波の測定用であるので、上下部それぞれ 8 cm はペンキを塗り絶縁した。

波高計の検定は二重の容器を用いて行なった。内部の容器は、上部に波高計が通る程度の穴を開けた蓋を有している。まず、この容器を測定水路中の塩水で満たし、次いで外部の容器に徐々に淡水を注ぎ、乱れない境界面を作る。電導度計で調べた結果、この方法ではほぼ理想通りの上下二層の境界面を作れることがわかった。流下距離が増大すると波高が減衰する傾向にあるので、波高計の中立位置を測定点により変えて充分出力を得られるようにしたので、各測定点毎に検定を行なった。

波の記録は0.4秒おきに200個の値を読みとり、それより平均境界面を算出し、ゼロアップクロスの方法で波高を定めた。

実験結果 測定は表-1に掲げる

表-1 流れの条件

二つの場合について行なった。 h_0 は初期上層水深、 F_i 、 R_e は夫々内部フルード数、レイノルズ数の水路流入点での値である。

Run	流量 (cm^3/s)	$\Delta\rho/\rho \times 10^3$	h_0 (cm)	F_i	R_e
1	600	6.2	5.77	0.895	2980
2	520	6.2	6.05	0.708	2400

表-2 測定結果 (CGS 単位)

実験結果の整理は、表面波との比較という観点から波高及び周期を対象として、 $H_{\max}$: 最大波高, $H_{1/10}$: $1/10$ 最大波高, $H_{1/3}$: 有義波高, $\bar{H}$: 平均波高, H_{rms} : 二乗平均波高, $T_{\max}$: 最大周期, $T_{H_{1/3}}$: 有義波の周期, $T_{1/3}$: $1/3$ 最大周期, $\bar{T}$: 平均周期を求めた。その結果は表-2に示してある。なお、測定点は流入口からの距離を示し、平均界面は自由水面からの距離で示してある。

	Run 1					Run 2				
測定点	10	20	40	80	120	10	20	40	80	120
平均界面	6.23	6.29	6.83	7.06	6.67	7.91	7.70	7.77	7.65	7.49
データ数	69	78	78	81	66	63	81	78	78	66
$H_{\max}$	1.20	1.77	1.13	1.50	0.42	0.81	1.15	0.74	0.72	0.35
$H_{1/10}$	1.11	1.44	1.00	1.04	0.39	0.76	0.80	0.59	0.44	0.33
$H_{1/3}$	1.00	1.13	0.82	0.80	0.33	0.62	0.69	0.47	0.31	0.25
$\bar{H}$	0.61	0.72	0.52	0.51	0.22	0.43	0.45	0.28	0.18	0.14
H_{rms}	0.69	0.81	0.57	0.58	0.24	0.47	0.49	0.32	0.22	0.16
$T_{\max}$	6.5	4.9	4.6	5.6	8.3	14.6	6.0	5.8	7.0	18.5
$T_{H_{1/3}}$	3.1	2.7	2.6	2.5	3.4	2.5	2.4	2.5	2.7	5.2
$T_{1/3}$	3.6	3.1	3.1	2.8	4.0	4.1	2.8	3.0	3.4	5.3
$\bar{T}$	2.4	2.2	2.1	1.9	2.4	2.6	2.0	1.9	1.9	2.7

考察 波高については、図-3に $H_{1/3}$ と H_{rms} との関係、図-4に $H_{1/10}$ と H_{rms} の関係、図-5、図-6に頻度累加曲線を示す。図中の直線は、いずれも波高の分布がレイリイ分布に従うと考えて算出された関係である。これらの図よりみて、波高の分布はレイリイ分布に充分よく一致していることが判る。図としては示さなかったが、 $H_{\max}$ 、 $\bar{H}$ と H_{rms} の比もレイリイ分布からの推定値によく一致しており、内部波高の分布もレイリイ分布で近似できると結論してもよさそうである。内部フルード数0.708のRun 2は充分安定な界面の測定と考え、Run 1は不安定な状態にできるだけ近付けて測定することを考えた。しかし、混合が生じて連続的な密度分布が生じてしまうと波高計の出力特性が変化してしまうので、電導度計によって界面の分離状態を検定しながら内部フルード数を増大させた。測定結果より、混合が顕著に生じていなければ内部波高の分布特性は内部フルード数に依らないと言える。

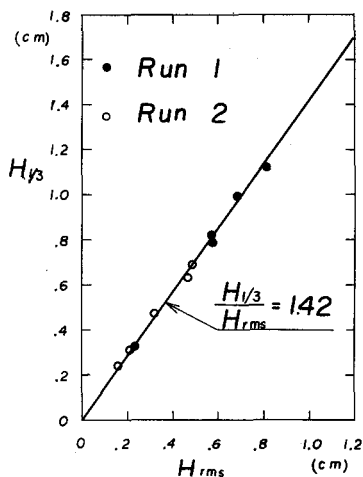


図-3 $H_{1/3}$ vs. H_{rms}

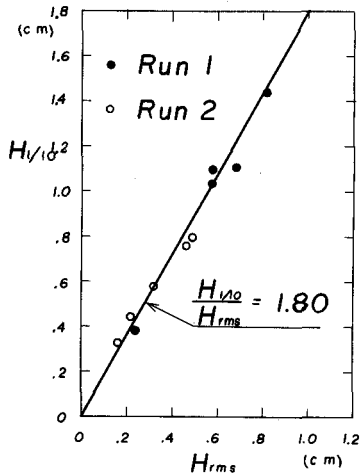


図-4 $H_{1/10}$ vs. H_{rms}

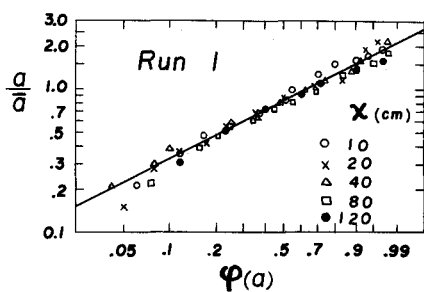


図-5 波高の頻度累加曲線

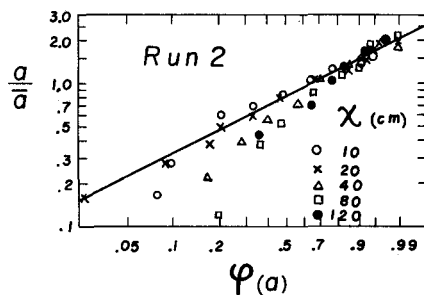


図-6 波高の頻度累加曲線

波高の絶対値については、Run 1の方が大きく、更に上層流れの流程が大となるに従い波高が小さくなる傾向にある。ただ、例外は上下層の接触点より20cm距たった点の測定であり、ここで波高が最大値を示すことが観察される。内部フルード数が小さな流れでは、他の測定例においても流下に伴ない攪乱の強度が一旦増大した後に減少する、という形が見られ、内部波の発達あるいは弱い内部ジャンプ等の原因が考えられるが詳細は不明である。表-2における平均界面の欄を見ると微量ながら流れの方向に変化しており、流れの状態はマクロな量のみでは捉えられないことがわかる。また、流入点水深と比較して水路中での上層厚さが大きくなっており、淡水を流し始める際の初期攪乱があり、内部フルード数が1以下であっても完全に分離した境界面とは異なっていることが予測される。

周期については表面波と比べるとその特性が大きく異なり、浮力の影響を強く受けている。 $\bar{T}$ と T_{max} , $T_{H1/3}$ との間には正の相関が見られ傾向としては表面波と一致するが、有義波高が増大しても平均周期は大局的には一定であり、表面波における性質と著しく異なる。結果を図示してみるとRun 1, 2の間には顕著な差はないが、種々の周期の間の関係を定めるには資料が足りないと考えられ、表-2に結果を掲げるに止める。

Ⅳ. 結論

- (1) 上下層の密度差が小さく、弱い混合状態の場合には、混合に関与する乱れエネルギーは(8)式で与えられ、リチャードソン数に逆比例する。
- (2) 乱れ速度の周波数スペクトルは、非混合型では(9)式、混合型では(10)式で与えられる。周波数のべきは、それぞれ (-3) と (-5) である。
- (3) 内部波高の確率分布はレイリイ分布で近似できる。

本研究は、文部省科学研究費「成層密度流の界面現象に関する水工学的研究」(代表者：埼玉大学 嶋 祐之教授)の援助を受けた。記して謝意を表わします。また、東京工大 日野教授には文献15)の原文の所在をお教え頂いた。

本研究の一部は、下記論文に含まれ発表済みである。

Tamai, N. "Unified view of diffusion and dispersion in coastline waters," J.Faculty of Eng. Univ. of Tokyo, Vol.31, No.4, Dec. 1972.

参考文献

- 1) Helmholtz, H. 2) Kelvin, W. See Advances in applied mechanics, Vol.9, 1966.
- 3) Taylor, G.I. (1931) Proc. Roy. Soc. A, Vol. 132, 499. 4) Miles, J.W. (1961) J. Fluid Mech. Vol. 10, 496. 5) Howard, L.N. (1961) J. Fluid Mech. Vol. 10, 509.
- 6) Drazin, P.G. and L.N. Howard (1961) J. EM Div. Proc. ASCE, Vol. 87, 101.
- 7) Keulegan, G.H. (1949) J. Res. Vol. 43, Nat. Bur. Stands. 487. 8) 浜田徳一 (1967 ~ 1969) 第14回海講, 214, 第15回海講, 180, 第16回海講, 153. 9) Ellison, T.H. and J.S. Turner (1959) J. Fluid Mech. Vol. 6, 423. 10) 岸 力, 加藤正進 (1967) 第14回海講, 240. 11) Minami, I. (1967) Coastal Eng. in Japan, Vol.10, 117. 12) 和田 明, 片野尚明 (1968) 第15回海講, 297. 13) 須賀堯三, 高橋 晃 (1972) 第27回年講, 135.
- 14) 椿 東一郎, 小松利光 (1971, 1972) 第26回年講, 235, 第27回年講, 107.
- 15) Lumley, J.L. (1964) J. Atmos. Sci. Vol. 21, 99. 16) 岩崎敏夫, 阿部至雄 (1969) 第16回海講, 163. 17) Phillips, O.M. (1969) The dynamics of the upper ocean, 185.
- 18) 椿 東一郎, 浜村 実, 橋本美喜男 (1968) 第23回年講, 281. 19) 岩崎敏夫, 阿部至雄 (1970) 第17回海講, 343. 20) 和田 明, 片野尚明 (1970) 第25回年講, 115.
- 21) 井上和也 (1967) 第22回年講, II-188. 22) 日野幹雄, 谷 順一 (1969) 第24回年講, 183. 23) 岩佐義朗, 井上和也, 竹林征三 (1968) 第23回年講, 267. 24) 西村 司 (1972) 東京大学卒業論文.