

密度流について——海洋における内部波——

東京大学地震研究所

梶 浦 欣 二 郎

1 はじめに

水理講演会に密度流に関する話をするよう依頼されたとき、どうして私などにそんな話しがきたのかおどろきましたが、土木に直接関係したものでなくてよいとのことなのでお引受けしました。海洋学のふるい教科書にはよく密度流という言葉が使われていましたが、最近では密度流というよりは傾圧的（バロクリック）な流れということの方が多く、これは順圧的（バロトロピック）な流れと相補的につかわれます。これは、水理学で使う密度流とはかなりちがった内容をもっているようです。どうしておなじ密度流といってもイメージが異なってくるかというと、海洋の場合、スケールが非常に大きな現象を対象とすることが多く、このときは水平運動の式で加速度項や摩擦項に対して、地球自転の影響によるコリオリ項が大きく、密度差によっておこる水平の圧力傾度はほぼこのコリオリ項と釣り合い、運動は準地衡流的になります（水平圧力傾度と直角方向の水平運動が卓越する）。この効果の度合を示すのにロスビー数 $R_o = U/(fL)$ (U : 流速, L : 水平スケール, f : コリオリパラメータ $\sim 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$) または σ/f (σ : 波動の角周波数) があります。これらの無次元数が小さいほど流れは地衡流的になるわけです。

海洋学における最近の大循環理論の研究では、海面での運動量、熱、水蒸気などの大気との交換を適当にあたえて（時には大気運動の数値モデルと結合）大洋中での海水密度分布およびほぼ地衡流的な運動の様子を、同時に数値実験的に導き出すことに精力がつかわれています。

こゝでは、このような大循環としての密度流問題ではなく、あたえられた成層状態の海に擾乱としての波動がおこる場合、すなわち内部波の問題に話ををかぎります。土木の分野では、海水と淡水、あるいは温水と冷水などの二層流の流動、混合等の研究が盛んなようですが、海洋では、そのような問題のほか、海中でのエネルギーや運動量の伝播、消散の媒体としての内部波の問題が特に注目されています。この場合、スケールの大きな内部波では慣性重力波、さらに慣性振動周期 ($2\pi/f$) より長いものではロスビー波などがあります。海では密度が鉛直方向に連続的あるいは段階的に変化しているので、内部波は多数の異なるモードを含んでおり、エネルギーのモード間の移動も主要な課題となります。

2 海洋における内部波的擾乱の観測

ふるくから、海洋中に内部波の存在することは知られていましたが、測定技術上の困難からそれが観測された例はすくなかったといえます。こゝ 20 ~ 30 年の間に、種々の測器や測定法が開発され、目下海洋の内部波に関する知識は急激にふえつゝあります。

まず、BT (Bathythermograph) が普及して水温の鉛直分布が連続的に測定出来るようになり、この測定を時間的にくり返すことによって海中の水温変動が知られるようになりました。またサーミ

スタ・チェーンの発明によって走行中の船からも連続的に水温鉛直断面分布が得られるようになり、海洋の上層には内部波によると思われる水温の変動がいたるところに存在することが明らかになり、内部波のスペクトル分布なども議論されるようになってきました。一方、浅海では固定観測塔からの水温や塩分の連続観測、外洋では各種のブイによる観測（このなかにはアメリカのフリップ Floating Instrumented Platform やフランスのブイ観測室など有人のものも含まれます）がふえてくるにしたがって、海洋中の内部波について十分な理解がなければ、海洋中でのエネルギー、運動量などの伝播や海水混合の機構などとうてい理解出来ないであろうということになってきました。このような情勢を反映して、大洋中での長期にわたるブイ観測網の計画がたてられ、まだ、深海での長期間のブイ観測にはいろいろと技術的困難もありますが実行にうつされています（例えば、MODE : Mid-Ocean Dynamics Experiment, あるいはソ連のPolygon Experiment）。これらの観測計画では、環境があまり複雑でないように、強い海流域をさけ、大西洋の真中に観測網をもうけて内部波やその他の海中擾乱を研究することになっていると聞きます。

ブイ観測の興味深い結果の一例として、北アメリカのロングアイランド沖 300km にあるD点（39° 20' N, 70° W）での連続流速観測を紹介してみます（Fofonoff, 1969）。この場所の水深は2 600 m, 湾流の岸よりに位置しています。いろいろの深さの層での流速変動のパワースペクトルをつくると、上層（50 m 以浅）と下層ではかたちがやゝ異っている上にパワーレベルが全然ちがいますが、下層どうしではかなりかたちが似ています。特に下層のパワースペクトルを、その層のバイサラ角周波数Nで割ってみると、各層のスペクトル・レベルがほぼ同じになります。上層（50 m 以浅）では特に慣性振動周期の流速変動が卓越しているのが注目され、また上下層とも鉛直方向の相関がきわめて悪く、変動がきわめてランダムである可能性を示しています。

このような内部的変動が、どうして、どこでおこされ、どのように伝播し、最後にはどのようなかたちで消滅するかということが問題です。いまのべたブイ観測で、上層に卓越する慣性振動周期の変動は、直接的にその場の海面上の風の応力に関係し、スケールの大きな風系が急にその向きを変えたり、強さを変化するときには過渡的現象として発達することが大体たしかめられています（Pollard and Millard, 1970）。スケールの大きな風系がひきおこす海中の波動的擾乱は波長が長いものになるであろうと想像されます。このとき、内部波の波速が非常におそいことを考えると、理論的に周期が慣性振動周期にきわめて近くなることが予想されます。慣性重力波の周期の上限が慣性振動周期なのです。これに対し、下層での擾乱については、表層から伝わったものか、他の海域から伝わったものか、あるいはさらにこれらの擾乱が内部波と呼べるのかどうかあまりはつきりしていません。海洋乱流というものもありそうですから。

一般に、内部波の生成に関しては、表面での風の力によるもの以外に、地形性のものがあることが広くみとめられています。特に半日周期の内部波についてよく議論されたものですが、潮汐が陸棚あるいは島棚上に進んでくるとき、棚斜面で内部波をつくり出すというものです（Rattray, 1960; Cox and Sandstrom, 1962; Rattray, et al, 1969）。このことは実験的にもたしかめられており、地形によって各種の内部波ができること、また、潮汐エネルギーのかなりの部分が内部波を通して海中で消散するのではないかという議論がなされています。

このほか、波と波との共鳴相互作用によって、ある内部波から別のモードの内部波が出来ることが考えられます。表面波と内部波、あるいは内部波の異なるモードを含む3つの波の間で共鳴的なエネルギー交換がおこり得ることは、4つの波を考えないと共鳴的な作用のおこらない表面波だけの場合に比べ、より効果的である可能性があります。このことはあとでものべるつもりです。まず初めに簡単に内部波の線型理論を復習しておきます。

3 内部波の理論

海洋における内部波の理論は、Phillips (1966)の教科書に、簡潔で要領よくまとめられている。いま、現象のスケールが小さいとして地球回転の影響を無視し、平衡状態での密度 ρ_0 は鉛直方向のみに変化しているとする。このとき非圧縮性流体中の内部波に関する基本式は、ブシネスク近似（慣性力に関して密度変化の影響を無視）で次のようにかける。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta^2 w) + N^2(z) \Delta_h^2 w = Q(\mathbf{x}, t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 t は時間、 x, y, z は直角座標系で z は鉛直上向きに正、それぞれの方向の速度は u, v, w である。また、

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right); \Delta_h^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$N^2(z) = - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \quad (g: \text{重力加速度})$$

であり、 $N(z)$ はバイサラ角周波数（ときにはブラント角周波数ともいう）である。安定状態では ρ_0 が上方にむかって減少するから N は実数である。 $Q(\mathbf{x}, t)$ は、非線形項をまとめてかいたもので、微小振幅波の理論では二次以上のオーダーの項となるので省略する。

ここで平面波型の解をとり、波の進行方向に x 軸をとると

$$w = W(z) \exp \{ i(kx - \sigma t) \} \quad \dots\dots\dots(2)$$

したがって(1)は

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + m^2(z) W = 0 \quad \dots\dots\dots(3a)$$

$$m^2(z) = k^2(N^2 - \sigma^2) / \sigma^2 \quad \dots\dots\dots(3b)$$

となる。ここで海面および海底での境界条件を考慮すると、与えられた k に対して σ が固有値としてきまり、それに応じて W が固有関数としてもとまる。

いま、水深 H の水層の上下が固定境界であり、しかも N が深さによらず一定の場合に、

$$W(z) \sim \sin \{ m(H+z) \} \quad \dots\dots\dots(4)$$

という解をとると、次の条件が必要になる。

$$m^2 = k^2(N^2 - \sigma^2) / \sigma^2 = (n\pi/H)^2; n = 1, 2, \dots \quad \dots\dots\dots(5)$$

(5)をかきなおすと

$$\sigma^2 = N^2(kH)^2 / \{ (n\pi)^2 + (kH)^2 \} \quad \dots\dots\dots(6)$$

すなわち、長波長 ($kH \ll n\pi$) では波速 (σ/k) が波長によらず長波的であるが、モード数 n の増加とともに減少する。一方で、短波長の極限 ($kH \gg n\pi$) では波の角周波数 σ がバイサラ角周波数 N に近づき、 N は σ の上限である。コリオリ効果を入れると長波長の極限内部波の σ は n にかかわらず f に近づく。

表面と海底との境界条件を満足する(2)の型の内部波は水平方向に進み、これをモード波と呼んでモード数は n である。これに対し、別な見方による内部波の表現がある。これは基本波とよばれ、 w の波動解として

$$w = \hat{w} \exp \{ i (k x + m z - \sigma t) \} \quad \dots\dots\dots(7)$$

をとる。一般に N^2 が一定でなくても(3)において $m^2(z)$ の変化がゆっくりしているならば (N^2 の変化のスケールに対し鉛直の波長 $2\pi/m$ が小さいとき) , WKB 近似によって(7)の型の解を得ることが出来る。

(7)型の波動は水平に進むモード波とことになって、ななめ上方あるいは下方に位相が進み、波数ベクトルの方向と水平軸とのなす角を θ とすると、(3b)をつかって

$$\tan \theta = m/k = \pm \{ (N^2 - \sigma^2) / \sigma^2 \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots(8)$$

とかける。 θ が波長に無関係で N と σ とだけできまることが重要である。

基本波は一見奇妙な性質をもっており、計算すると容易にわかる通り、群速度と位相速度とが直交する。群速度の方向と x 軸とのなす角 φ は

$$\tan \varphi = \mp \{ \sigma^2 / (N^2 - \sigma^2) \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

である。また、非圧縮性流体中の(7)形波動の当然の帰結として波数ベクトルと水粒子速度のベクトルとが直交する。

この波の局所的エネルギー密度を E とすると、鉛直の変位を η として

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 \langle u^2 + w^2 + N^2 \eta^2 \rangle : \langle \rangle \text{ 1 週期平均} \quad \dots\dots\dots(10)$$

また、 $\mathbf{J}$ をエネルギー・フラックスとすると、エネルギーの保存則は

$$\partial E / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\mathbf{J} = \langle p \mathbf{u} \rangle = E \mathbf{C} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで $\mathbf{C}$ は群速度で成分は C_x, C_y, C_z である。

波の運動によるレイノルズ応力は

$$\begin{aligned} \rho_0 \langle u^2 \rangle &= E k C_x / \sigma, \quad \rho_0 \langle w^2 \rangle = E m C_z / \sigma + E, \\ \rho_0 \langle uw \rangle &= E k C_z / \sigma \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(13)$$

(9)で与えられるように、角周波数のきまった波は、あるきまった方向にしかエネルギーを伝えないので、一定の振動数をもつ局所的な擾乱源から出る波を実験的にしらべると、一定の方向にのみ擾乱がみられる。また、時間的に有限な局所的擾乱から発生する内部波では方向性のあるエネルギー分散がおこる (これらのことに関しては多くの研究があるが、二、三をあげると, Light hill, 1967;

Mowbray and Rarity, 1967; Schooley and Hughes, 1972)。

基本波が海底でどのように反射するかを考えてみる。境界の傾斜を水平面から $\tan \alpha$ とすると、境界条件は、その面上で、それに直角方向の粒子速度が 0 である。境界にそう波長は入射波と反射波とで等しくならねばならないが、基本波は鉛直軸に対して一定の方向に進むから境界が傾斜していると波が反射することによって波長は変化する。また、エネルギーの流れの方向は(9)できまっているから、

$$(i) \quad \left| \tan \varphi / \tan \alpha \right| > 1, \quad (ii) \quad \left| \tan \varphi / \tan \alpha \right| < 1 \quad \dots\dots\dots (14)$$

によって、波の反射の様子がことなる。

(i)の場合は前方反射、(ii)の場合は後方反射となり、(i)(ii)の場合ともに入射波が下向き、及び浅い方へのエネルギーフラックス成分をもっているときは、反射波の波数及び流速振幅が増加する。この逆の場合は、(i)で深い方へフラックスが向いているとき、(ii)で入射波のエネルギーフラックスが上向きするときである。境界面が水平ならば異常反射はおこらない。

基本波のこのような特性をつかうと、内部波が地形変化のある海を伝播する様子を定性的に推察できる。例えばくさび状の水域に内部波が入ってくると、(i)の条件にあう周期の波は後方へ反射されないから先端に達し、こゝでエネルギーを何らかの方法でうしなう。(ii)の場合には、エネルギーが後方に反射されて奥にとどかない。この問題は Wunsch (1968, 1969) が理論的にといた。また、一様水路の中程に障害物 (スクリーン) をおくと、一方から進行してきた内部波が基本波としてみるとスクリーンのうしろに影をつくることが予想される。このことは Sandstrom (1966) の実験でほぼたしかめられている。ただし、スクリーンの先端は、特異点となるから、基本波による幾何光学的な波線による現象の解釈は不十分となる。このことについては厳密な理論が提出されている (Larsen, 1969; Robinson, 1969)。

4 波と波との共鳴相互作用

いま波数ベクトル $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, 角周波数 σ_1, σ_2 の内部波があるとき、この二つの波によっておこる(1)式の非線型項 Q では 2 次の項が最大で、それらは

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 \pm \sigma_2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

の波数ベクトルと角周波数をもつ外力として、(1)式の左辺に作用する。こゝで、外力 ($\mathbf{k}_3, \sigma_3$) によっておこされる波は ($\mathbf{k}_3, \sigma_3$) の特性をもつが、これが内部波の分散関係を満足しているときには、波が自由波となり、三つの波の間で共鳴的相互作用によって効果的なエネルギー交換がおこり得る。

よく知られているように、表面波だけの場合には、2 次の段階では分散関係を満足させることが出来ず、2 つの波の 2 組、すなわち 4 つの波の相互作用を考えなければならない。これにくらべると、内部波を考えるとモードによっていろいろの分散関係があることから 2 次の段階でこの共鳴エネルギー交換が可能である。

前章でのべた基本波の場合は、個々の波については常に $Q = 0$ となるので、単一波としては振幅に制限がつかず、波の重なる場合には Q が大きくなる事が出来る。このことからみると、基本波

の相互作用は重要である。

(8)から $\cos \theta = \sigma/N$ であり、周波数についての共鳴条件は

$$\cos \theta_1 \pm \cos \theta_2 = \cos \theta_3 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。(Phillips, 1966)。

モード波としての内部波について考えるときは、波数ベクトルを水平面内にかざるかわりに鉛直方向についてモードの種類に制限がつく。簡単のために N 一定で表面固定壁の場合、固有関数は(4)、固有値は(5)で与えられるから、モード数 n について

$$n_1 \mp n_2 = n_3 \quad \dots\dots\dots (17)$$

という条件がつけ加わる。すなわち少なくとも2つのモード(表面波モードを含む)の波が相互作用に關与する必要がある。

内部波を含む共鳴理論は、はじめにBall (1964) が二層モデルについて議論し(15)を満足する波をみいだす関式の方法を提出し、2つの表面波と一つの内部波の相互作用を具体的に計算した。つづいてThorpe (1966) は、この議論を連続成層モデルに拡張し、特定の場合の相互作用の係数をも計算した。Ball や Thorpeは共鳴条件にある特定の3つの波の組を考えたが、Hasselmann (1966)は、統計的集団としてのエネルギースペクトルを考え、その変化をきわめて一般的に論じ、内部波を含む場合にもその相互作用の係数のかたちを示した。Kenyon (1966) は、この考え方にしたがって、実際にある初期の内部波スペクトル(モードは1,あるいは1と2)をあたえて、各モードのスペクトルの変化を計算した。また、表面波と内部波の相互作用も計算したが、これは内部波どうしのもより大分小さかった。また、浅い海で鉛直変位振幅の大きな内部波があるとき、この相互作用が最も大きいという。

(15), (17)の条件を考えると、2つの波から3番目の波が出来るときは(i)小さなモード数で大きな角周波数の波、又は(ii)大きなモード数で小さな角周波数の波、のどちらかになる。又逆に、1つの大きな波が共鳴的相互作用で不安定になり、他の2つの波にエネルギーを移すときには、初めの波の角周波数が最大である。

内部波どうしの共鳴的な相互作用の場合、同一鉛直面内の波でもよいから、これは水路での実験が出来る。特に、一様な密度勾配をした水路で、Martin, Simmons and Wunsch (1972) はきわめて詳細な実験を行い、理論との対比を行なった。このとき、初めにモード3でかなり大きな振幅の波をつくると、これが(3, n , $n+3$)のモードになるが、このうち n のモードの波は上流側に進み、3, $n+3$ のモードの波が下流側に進むような組合せが最もよく発達するという。

5 む す び

いままでのべてきたように、海洋中での内部波の問題は、観測、理論、実験のそれぞれの面から最近10年あまりの間に急速に発展してきたが、まだ、内部波の発生、相互作用などについては未知のことが多い。また、内部波と海流のような大規模な流れとの相互作用もあまりはっきりしていない。簡単なモデルで、内部波と一般流との相互作用を議論したものとしては、波動作用(Wave action)保存の式があるが、このことについてはのべる余裕がなかった。内部波の碎波による乱れの発生などもこれからの問題といえよう。

引用文献

- Ball, F. K., 1964: J. Fluid Mech., 19, 465-478.
- Cox, C., and H. Sandstrom, 1962: J. Oceanog. Soc. Japan, 20th Anniv. Vol., 499-513.
- Fofonoff, N. P., 1969: Proc. First Sci. Adv. Meeting for NDBS, 50-61.
- Hasselmann, K., 1966: Rev. Geophys., 4, 1-32.
- Kenyon, K. E., 1968: J. Marine Res., 26, 208-231.
- Larsen, L. H., 1969: Deep-Sea Res., 16, 411-419.
- Lighthill, M. J., 1967: J. Fluid Mech., 27, 725-752.
- Martin, S., W. Simmons, and C. Wunsch, 1972: J. Fluid Mech., 53, 17-44.
- Mowbray, D. E., and B. S. H. Rarity, 1967: J. Fluid Mech., 28, 1-16.
- Phillips, O. M., 1966: The Dynamics of the Upper Ocean, Camb. Univ. Press 261 p.
- Pollard, R. I., and R. C. Millard, Jr., 1970: Deep-Sea Res., 17, 813-821.
- Ratray, M. Jr., 1960: Tellus, 12, 54-62.
- Ratray, M. Jr., J. G. Dworski, and P. E. Kovala, 1969: Deep-Sea Res., 16, 179-195.
- Robinson, L. H., 1969: Deep-Sea Res., 16, 421-429.
- Sandstrom, H., 1966: Ph. D. Thesis, Univ. Calif., San Diego.
- Schooley, A. H., and B. A. Hughes, 1972: J. Fluid Mech., 51, 159-175.
- Thorpe, S. A., 1966: J. Fluid Mech., 24, 737-751.
- Wunsch, C., 1968: Deep-Sea Res., 15, 251-258.
- Wunsch, C., 1969: J. Fluid Mech., 35, 131-144.