

周期変動密度流の乱れと拡散

東京工業大学工学部 正会員 日 野 幹 雄

東京工業大学大学院 学生員○高 須 修 二

乱流ことに非等方性乱流の問題は我々にとって最も興味深いものである。しかし、支配方程式を用いてこの問題を解析する時、我々は数学の面で非常に苦しむ事になり、十分な結果を得にくい。本論文では、この問題に最も取り組み易いと考えられる—主流よりのエネルギー供給が周期的であり、その周期が乱れの時間スケールに較べて大きい、成層している流れ—を選び、それを理論的に解析して非等方性乱流の構造を明らかにしようと試みた。この問題を解くのに数値計算法によらず純解析的に解を求めようと努力した。これは解析的な解によって乱流過程のメカニズムがより明確になると考えるからである。

1. 序 論

主流のエネルギーは流れのシュアによりマクロタービュランスの渦のエネルギーとなり、これは慣性項の作用により次第に高周波の乱れのエネルギーに伝達され、乱流は発達していくものと考えられている。また流れが成層している場合、その成層状態が安定な時、渦のエネルギーの一部はポテンシャルエネルギーに変換され、逆に不安定な時、ポテンシャルエネルギーをある程度大きな渦のエネルギーに変換させる効果をもたらしている。このように主流の運動、乱れエネルギー、密度勾配等には密接な関係があるので、主流の運動に周期性があるならば、当然乱れエネルギー、密度変化にも周期性があらわれるものと考えられる。このような流れの内で特に速度の平均（十分に長い時間を考えて）が0であるものは最も考え易いものであるが、そのような流れは外海と内海あるいは外海と外海とを連結している水道内の潮流にみる事が出来る。本論文ではコリオリの力を無視できる短い矩形断面の直線水道における成層している潮流を考え、レイノルズの運動方程式、エネルギー方程式等を用いて速度分布、乱れエネルギー、混合長等を求め、それらの性質を調べてみた。

2. 基礎方程式

基礎方程式には流体運動を支配する質量保存の式、運動量保存の式さらに塩分量保存の式を考える。

今、 x_1 、 x_2 軸を水平方向、 x_3 軸を鉛直上向きに採り、 x_i 方向の流速を U_i 、海水の密度を P とする。また瞬間量 U_i 、 P をそれぞれ平均量 $\bar{U}_i$ 、 $\bar{P}$ と乱れ成分 U'_i 、 P' に分解し、

$$U_i = \bar{U}_i + U'_i, \quad P = \bar{P} + P'$$

として3つの基礎方程式に代入し、集団平均操作を施し、レイノルズの公理を使って式を簡単化すると、Einsteinの和記号を用いて平均量に関する質量保存の式(1)、塩分量保存の式(2)、運動量保存の式(3)を得る。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{U'_j \bar{P}} = D_s \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x_j \partial x_j} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{U'_i U'_j} = -\frac{1}{\bar{P}^*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \left(\frac{\bar{P} - \bar{P}^*}{\bar{P}^*} \right) g \delta_{i3} + \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

但し、 D_s は分子拡散係数、 ϵ は動粘性係数、 P_* はある基準面の平均密度

さらに運動量保存の式から乱れ成分に着目して、乱れエネルギーに関する方程式を作る事が出来る。すなわち、平均流は鉛直成分を持たないと考える事が出来るので、水平方向の乱れを一様と仮定すると

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \overline{U'_3 \left(\frac{\bar{P}}{P_*} + B' \right)} - \epsilon \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_3} - \epsilon \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{U'^2_3} \right\} = -\overline{U'_a U'_3} \frac{\partial \bar{U}_a}{\partial x_3} - \frac{\bar{P} \overline{U'_3}}{P_*} g - \epsilon \dots (4)$$

を得る。但し $\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\partial \overline{U'^2_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U'^2_j}}{\partial x_i} \right)$, $\bar{B} = \frac{1}{2} (\overline{U'^2_1} + \overline{U'^2_2} + \overline{U'^2_3})$, $B' = \frac{1}{2} (\overline{U'^2_1} + \overline{U'^2_2} + \overline{U'^2_3})$
また、ブシネスク、テイラーの輸送理論の考えから次式を得る。ここで k は渦動拡散係数、 a は1のオーダーの比例定数

$$-\overline{U'_i U'_j} = k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}, \quad -\overline{P' U'_j} = k \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j}, \quad -\overline{B' U'_j} = a k \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_j} \dots (5)$$

壁面の極く近くの粘性の卓越している領域を除いて、渦動拡散係数は分子粘性係数、分子拡散係数に較べて大きく、分子拡散、分子粘性の項は渦動拡散の項に対して無視する事が出来る。

すなわち式(5)を(2), (3), (4)に代入するとそれぞれ次の式(6), (7), (8)となる。

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \dots (6)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{P_*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \left(\frac{\bar{P} - P_*}{P_*} \right) g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \dots (7)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x_3} k \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_3} + k \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_3} \right) + k \frac{g}{P_*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_3} - \epsilon \dots (8)$$

今、 x_1 軸を平均流の方向に採り、 x_3 軸を水底より鉛直上向きに採り、 x_1, x_2, x_3 をそれぞれ x, y, z と書く事にする。また流れは2次元とし、 x 方向に一様とする。(図1)

このように単純化する仮定を設けるのは始めに述べたように、非等方性乱流のメカニズムを解析的に取扱う立場から行ったものである。

仮定より、 $\overline{U_2} = 0$, $\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x} = 0$ であるから質量保存の式(1)

は
$$\frac{\partial \overline{U_3}}{\partial z} = 0$$

となる。底面で $\overline{U_3} = 0$ であるから、結局

$$\overline{U_3} = 0 \dots (9)$$

塩分量保存の式(6)は式(9)及び仮定より、 $\overline{U_2} = 0$,

$$\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = 0 \quad \text{である事を考慮して、次の式(10)のようになる。}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \dots (10)$$

同様に運動量保存の式(7)、乱れエネルギーに関する式(8)はそれぞれ式(11)、式(12)と書ける。

$$\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial z} \dots (11)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = k \left(\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial z} \right)^2 + k \frac{g}{P_*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} - \epsilon \dots (12)$$

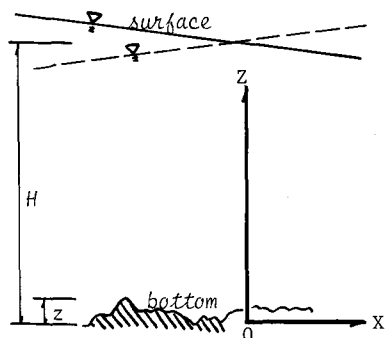


図1 概略図

但し, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ は水面勾配

式(2)の右辺第1項はレイノルズ応力による主流よりのメカニカルなエネルギー供給の項であり常に正, 第2項は浮力の項で $\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} < 0$ の時は乱れエネルギーがポテンシャルエネルギーに変換され負 $\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} > 0$ の時は正となる。第3項は乱れによるエネルギー輸送, 第4項は粘性によるエネルギー消費を表わしている。

さて, 本論文では乱れに着目しているので渦動拡散係数 k , エネルギー逸散 ϵ を記述するものとして, 乱れの平均速度 $\bar{B}$, 乱れのスケール L を用いるのが適当である。

次元的考察によりこれらを次のように乱れの特性量と関連づける。

$$k = C L \bar{B}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\epsilon = C' \bar{B}^{3/2} / L \quad \dots\dots\dots (14)$$

但し, C, C' は1のオーダーの比例定数

前記のように渦動拡散係数及びエネルギー逸散を記述するものの1つに乱れのスケールを意味する混合長 L を用いた。カルマンは平均速度に着目し, 乱れの機構は局所量に支配され, 壁面の粗滑や平均速度には無関係と考え, 最もシンプルな2つの局所量 $\frac{d\bar{U}}{dz}, \frac{d^2\bar{U}}{dz^2}$ を選び, 次元的考察を加えて式(14)を仮定した。

$$L = K \left| \frac{d\bar{U}}{dz} / \frac{d^2\bar{U}}{dz^2} \right| \quad \dots\dots\dots (15)$$

本論文では乱れに着目しているので, 平均速度に関する局所量 $\frac{d\bar{U}}{dz}, \frac{d^2\bar{U}}{dz^2}$ のかわりに, それぞれ $\frac{\bar{B}^{1/2}}{L}, \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{B}^{1/2}}{L} \right)$ を用いて式(15)を仮定する。すなわち

$$L = -K \frac{\bar{B}^{1/2}}{L} / \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{B}^{1/2}}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(16)に与えられた仮定は以前発表した論文で用いた $\ell = \kappa z$ と異り z が小さい事を要求していない。

以上の基礎方程式を整理して示すと

$$\text{塩分保存の式} \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{運動量保存の式} \quad \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{乱れエネルギー方程式} \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = k \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z} \right)^2 + k \frac{g}{\bar{P}_*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} - \epsilon \quad \dots\dots (12)$$

$$\text{渦動拡散係数} \quad k = C L \bar{B}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{エネルギー逸散} \quad \epsilon = C' \bar{B}^{3/2} / L \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{混合長} \quad L \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{B}^{1/2}}{L} \right) + K \frac{\bar{B}^{1/2}}{L} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

これらの6つの方程式を用いれば, $\bar{U}_1, \bar{B}, L, \bar{P}$ を求める事が出来る。

3. 基礎方程式の変形

底面の影響の少ない水面近くの領域の主流の変動速度を次のように採る。

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (17)$$

但し, V_0 : 最大流速, ω : 主流変動の角振動数

また短周期の乱れ成分を除いた各点での各時刻の平均速度 $\bar{U}_1$ を次のように表わす。

$$\bar{U}_1(z, t) = W(z, t) + V(t) \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(8)を式(11)に代入し、これを次の2つの式に分解する。

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial W}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(19)は一次元の自由長波を表わす方程式と同じである。

また式(8)を式(12)に代入し、式(17)を用いると次の式(21)となる。

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = k \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + k \frac{g}{P_*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} - \zeta \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(10), (16), (20), (21)に式(13), (14)を代入し、さらに基本量として, H (水深), ω (主流の変動の角速度), V_0 (表面最大流速), P_* (ある基準面の平均密度) を選び、これらの式を無次元化すると、それぞれ式 (22), (23), (24), (25) となる。

$$N \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} l \sqrt{b} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$l \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{b}}{l} \right) + K \frac{\sqrt{b}}{l} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$N \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} l \sqrt{b} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$N \frac{\partial b}{\partial \tau} = l \sqrt{b} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - c_1 \frac{b^{3/2}}{l} + c_2 l \sqrt{b} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \beta \quad \dots\dots\dots (25)$$

但し, $\eta = z/H$, $\tau = \omega t$, $u = W/V_0$, $b = \bar{B}/V_0^2$, $N = \omega H / CV_0$,

$c_1 = C'/C$, $c_2 = gH/V_0^2$, $\rho = \bar{P}/P_*$ さらに乱れエネルギー方程式 (25) でエネルギー輸送の項は $\beta = \text{const.}$ で近似してある。この近似は壁面の近くを除いて満足される。

結局問題は式 (22) ~ (25) の連立偏微分方程式を解く事になる。

4. 基礎方程式の解

外力が周期的に変動している非線型な現象を考えているので、その周期を T とすると、他の変数は当然, T , $2T$, $3T$, の周期を持って変動すると考えられる。しかるに、前節の式 (22) ~ (25) の4つの偏微分方程式を常微分化するために、 $\sqrt{b}$, u , l , ρ の解の形を次のように仮定する。

$$\sqrt{b} = b_0(\eta) + Re \{ b_1(\eta) e^{i\tau} + b_2(\eta) e^{2i\tau} + \dots\dots\dots \} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$u = Re \{ u_1(\eta) e^{i\tau} + u_2(\eta) e^{2i\tau} + \dots\dots\dots \} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$l = l_0(\eta) + Re \{ l_1(\eta) e^{i\tau} + l_2(\eta) e^{2i\tau} + \dots\dots\dots \} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\rho = \rho_0(\eta) + Re \{ \rho_1(\eta) e^{i\tau} + \rho_2(\eta) e^{2i\tau} + \dots\dots\dots \} \quad \dots\dots\dots (29)$$

解の見透しを得るために、まず実際の現象では安定な成層状態では密度分布が時間的にあまり変化しない事を考慮して次のように仮定する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \approx 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

式(26) (28) (29) を式(22) に代入し、式(30) を用いると

$$\frac{d}{d\eta} l_0 b_0 \frac{d\rho_0}{d\eta} \approx 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

式(26) (28) を式(23) に代入すると、

$$\begin{aligned} & l_0 \frac{db_0}{d\eta} + \frac{1}{4} (l_1 \frac{db_1^*}{d\eta} + l_1^* \frac{db_1}{d\eta}) + \dots\dots\dots - b_0 \frac{dl_0}{d\eta} - \frac{1}{4} (b_1 \frac{dl_1^*}{d\eta} + b_1^* \frac{dl_1}{d\eta}) + \\ & \dots\dots\dots + K b_0 \\ & + \left[\frac{1}{2} (l_0 \frac{db_1}{d\eta} + l_1 \frac{db_0}{d\eta}) + \frac{1}{4} (l_1^* \frac{db_2}{d\eta} + \dots\dots\dots) - \frac{1}{2} (b_0 \frac{dl_1}{d\eta} + b_1 \frac{dl_0}{d\eta}) + \frac{1}{4} (b_1^* \frac{dl_2}{d\eta} \right. \\ & + b_2 \frac{dl_1^*}{d\eta} + \dots\dots\dots) + \frac{1}{2} K b_1 \left. \right] e^{i\tau} + \left[\frac{1}{2} (l_0 \frac{db_1^*}{d\eta} + l_1^* \frac{db_0}{d\eta}) + \frac{1}{4} (l_1 \frac{db_2^*}{d\eta} + \dots\dots\dots) \right. \\ & - \frac{1}{2} (b_0 \frac{dl_1^*}{d\eta} + b_1^* \frac{dl_0}{d\eta}) + \frac{1}{4} (b_1 \frac{dl_2^*}{d\eta} + \dots\dots\dots) + \frac{1}{2} K b_1^* \left. \right] e^{-i\tau} + \dots\dots\dots = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

式(26), (27), (28) を代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{iN}{2} \{ u_1 e^{i\tau} - u_1^* e^{-i\tau} + 2u_2 e^{2i\tau} + \dots\dots\dots \} = \frac{d}{d\eta} \left[\left\{ \frac{1}{4} (b_1^* l_0 + b_0 l_1^*) + \frac{1}{8} (b_2^* l_1 + \dots\dots\dots) \right\} \frac{du_1}{d\eta} \right. \\ & + \left\{ \frac{1}{4} (b_1 l_0 + b_0 l_1) + \frac{1}{8} (b_2 l_1^* + b_1^* l_2 + \dots\dots\dots) \right\} \frac{du_1^*}{d\eta} \left. \right] \\ & + \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{2} \{ l_0 b_0 + \frac{1}{4} (l_1 b_1^* + l_1^* b_1) + \dots\dots\dots \} \frac{du_2}{d\eta} + \frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} (b_2 l_0 + b_0 l_2) + \frac{1}{4} b_1 l_1 + \right. \\ & \dots\dots\dots \} \frac{du_1^*}{d\eta} \left. \right] e^{i\tau} + \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{2} \{ l_0 b_0 + \frac{1}{4} (l_1 b_1^* + l_1^* b_1) + \dots\dots\dots \} \frac{du_1^*}{d\eta} + \frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} (b_2^* l_0 + b_0 l_0^*) \right. \\ & + \frac{1}{4} b_1^* l_1^* + \dots\dots\dots \} \frac{du_1}{d\eta} \left. \right] e^{-i\tau} \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

式(26), (27), (28) を式(25) に代入して

$$\begin{aligned} & iN \left[\left\{ \frac{1}{2} b_0 b_1 + \frac{1}{4} (b_1^* b_2 + \dots\dots\dots) \right\} e^{i\tau} - \left\{ \frac{1}{2} b_0 b_1^* + \frac{1}{4} (b_1 l_2^* + \dots\dots\dots) \right\} e^{-i\tau} + \dots\dots\dots \right] \\ & = \left[\left\{ l_0 b_0 + \frac{1}{4} (l_1 b_1^* + l_1^* b_1) + \dots\dots\dots \right\} \frac{du_1}{d\eta} \frac{du_1^*}{d\eta} + \dots\dots\dots \right] + \left[\left\{ \frac{1}{8} (b_1^* l_0 + b_0 l_1^*) \right. \right. \\ & + \dots\dots\dots \} \frac{du_1}{d\eta} \frac{du_1}{d\eta} + \left\{ \frac{1}{8} (b_1 l_0 + b_0 l_1) + \dots\dots\dots \right\} \frac{du_1^*}{d\eta} \frac{du_1}{d\eta} + \dots\dots\dots \left. \right] e^{i\tau} + \left[\left\{ \frac{1}{8} (b_1^* l_0 \right. \right. \\ & + b_0 l_1^*) + \dots\dots\dots \} \frac{du_1}{d\eta} \frac{du_1^*}{d\eta} + \left\{ \frac{1}{8} (b_1 l_0 + b_0 l_1) + \dots\dots\dots \right\} \frac{du_1^*}{d\eta} \frac{du_1^*}{d\eta} \left. \right] e^{-i\tau} + \dots\dots\dots \\ & - c_1 \left[\left(\frac{b_0^3}{l_0} + \frac{b_1^2 b_0}{4 l_0} + \dots\dots\dots \right) + \left(\frac{b_0^2 b_1}{2 l_0} + \frac{b_1^2 b_1^*}{8 l_0} - \frac{l_1 b_0^3}{2 l_0^2} - \frac{b_1^2 b_0 l_1}{8 l_0^2} + \dots\dots\dots \right) e^{i\tau} \right. \\ & + \left(\frac{b_0^2 b_1^*}{2 l_0} + \frac{b_1^2 b_1}{8 l_0} - \frac{b_0^3 l_1^*}{2 l_0^2} - \frac{b_1^2 b_0 l_1^*}{8 l_0^2} + \dots\dots\dots \right) e^{-i\tau} + c_2 l_0 b_0 \frac{d\rho_0}{d\eta} + \beta \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

を得る。但し、*は共役複素数を表わし、 $R_e(A_n e^{in\tau}) = (A_n e^{in\tau} + A_n^* e^{-in\tau})/2$ の関係を用いた。

式 (31)～(34) を Order estimate して変動周期に関してまとめると

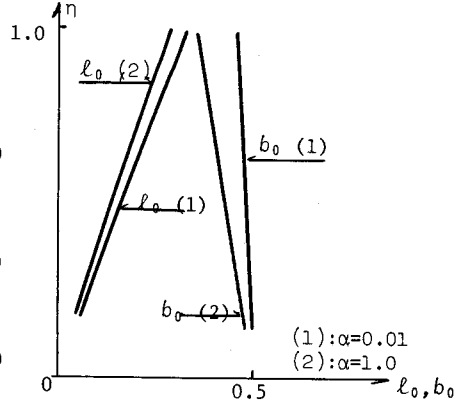
(a) 時間に無関係な項の平衡から得られる方程式

$$l_0 b_0 \frac{d \rho_0}{d \eta} = \Gamma \quad (\Gamma \text{ は積分定数}) \dots\dots (35)$$

$$l_0 \frac{d b_0}{d \eta} - b_0 \frac{d l_0}{d \eta} + K b_0 = 0 \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{1}{4} (b_1^* l_0 + b_0 l_1^*) \frac{d u_1}{d \eta} + \frac{1}{4} (b_1 l_0 + b_0 l_1) \frac{d u_1^*}{d \eta} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

$$l_0 b_0 \frac{d u_1}{d \eta} \frac{d u_1^*}{d \eta} - c_1 \frac{b_0^3}{l_0} + c_2 l_0 \frac{d \rho_0}{d \eta} + \beta = 0 \dots\dots\dots (38)$$



(b) 主流と同じ変動周期を待つ項の平衡から得られる方程式 図2. l_0, b_0 の変化

$$Re \left[\left(l_0 \frac{d b_1}{d \eta} + l_1 \frac{d b_0}{d \eta} - b_0 \frac{d l_1}{d \eta} + b_1 \frac{d l_0}{d \eta} + K b_1 \right) e^{i\tau} \right] = 0 \dots\dots\dots (39)$$

$$Re \left[i N u_1 e^{i\tau} \right] = Re \left[\frac{d}{d \eta} l_0 b_0 \frac{d u_1}{d \eta} e^{i\tau} \right] \dots\dots\dots (40)$$

$$Re \left[i N b_0 b_1 e^{i\tau} \right] = Re \left[\left\{ \frac{1}{4} (b_1^* l_0 + b_0 l_1^*) \frac{d u_1}{d \eta} \frac{d u_1^*}{d \eta} + \frac{1}{4} (b_1 l_0 + b_0 l_1) \frac{d u_1}{d \eta} \frac{d u_1^*}{d \eta} - \frac{c_1 b_0^2 b_1}{2 l_0} \right\} e^{i\tau} \right] \dots\dots\dots (41)$$

(c) 同様にして、変動周期が主流より短い項の平衡からも方程式が得られる。

式 (35) (36) (38) 及び (40) を用いて、 l_0, b_0, u_1, ρ_0 を求める事が出来る。すなわち、式 (40) が時間に関係なく成立する事より、式 (42) が得られ、さらに式 (42) を用いて式 (43) が得られる。

$$i N u_1 = \frac{d}{d \eta} l_0 b_0 \frac{d u_1}{d \eta} \quad \text{or} \quad -i N u_1^* = \frac{d}{d \eta} l_0 b_0 \frac{d u_1^*}{d \eta} \dots\dots\dots (42)$$

$$|u_1| \frac{d}{d \eta} l_0 b_0 \frac{d |u_1|}{d \eta} = l_0 b_0 \left| \frac{d u_1}{d \eta} \right|^2 - l_0 b_0 \left(\frac{d |u_1|}{d \eta} \right)^2 \approx 0 \dots\dots\dots (43)$$

底面からある程度離れた領域では u_1 の phase は η に依存しないと考えられるので、結局 (43) の右辺は 0 となる。式 (43) を積分する事により式 (44) を得る。

$$l_0 b_0 = \frac{d |u_1|}{d \eta} = C_u \quad (\text{但し, } C_u \text{ は積分定数}) \dots\dots\dots (44)$$

式 (35), (44) を式 (38) に代入すると式 (45) を得、さらに式 (45) を式 (36) に代入すると式 (46) を得る。

$$l_0 = \frac{C_u^2}{a b_0} - c_1 \frac{b_0^4}{b_0} \dots\dots\dots (45), \quad \left(\frac{2 C_u^2}{a b_0} + 2 c_1 \frac{b_0^4}{b_0} \right) \frac{d b_0}{d \eta} + K b_0 = 0 \dots\dots\dots (46)$$

(但し, $a = -(c_2 \Gamma + \beta)$)

式 (46) を積分すると式 (47) を得、式 (45) に代入して式 (48) を得る。(但し, $c \eta$ は積分定数)

$$\eta = \frac{2}{3 K a} \left(\frac{3 C_u^2}{b_0} - c_1 b_0^3 \right) + C \eta \dots\dots\dots (47), \quad l_0 = \frac{K}{2} (\eta - C \eta) - \frac{2 c_1 b_0^3}{3 a} \dots\dots\dots (48)$$

安定な密度場を考えているので $a > 0$ と考えて、 b_0, l_0 と η の関係を図2に示してある。

< 参考文献 >

O. M. Phillips, 1966; The dynamics of the upper ocean.

J. Laufer, 1953; The Structure of turbulence in fully developed pipe flow.