流出系の分析と同定について

――― 河川流域のモデル化を中心に ―――

京都大学工学部　　高　棹　琢　馬

1. 流出系の分析と同定

流出系のモデル化について，最近急速に関心がはらわれるようになった。その理由は，水工目的の多様化とそれに対応する系内部構造の分析的研究とモデル化の手法の進展および現象の観測量の増大にあろう。

さて，流出系のモデル化の方法論としては，大別して二つあって，その一つは全体系を内部構造を考慮して部分系群に分割し，それぞれの構造と部分系群の相互関連を明らかにしてモデルの組みたてを行なっていく分析的，演繹的立場であり，いま一つは系の内部構造をとくに考慮せず，系をBlack Boxとして入力と出力から応答特性を調べていく帰納的立場である。いずれも，広義にいえばモデルおよびモデル・パラメータの同定を目的としている点では同一であり，水工目的と水文データの存在条件によって使いわけられるべきであって，その優劣は簡単にはいえない。ただ，後者の立場は流出系の普遍的表現というより計算技術により結びついているのであって，前者の分析的立場からの成果を十分組み入れるべきである。その意味で，全体系を Black Box とする立場には筆者は否定的である。この点については，多々指摘したい点があるが，紙数の都合上省略し，以下では流出系モデル同定の基本的問題の一つである河川流域の計量特性について述べる。

2. 河川流域のモデル化の基礎

2−1　河道分布則

河道分布系は Horton−Strahlor 位数系において位数化ノードCuの集合 $\{C_1, C_2, \cdots C_u, \cdots C_k\}$ で表わされ，ここにC_uは流域最下流端の河道である。また，C_uはそれがもつ合流点数 i によって層別化された要素ノード ${}_iC_u$ の集合で

$$C_u = \{ \sum_{i=1}^{N_u-1} ({}_iC_u) \}$$

のように表現され，${}_iC_u$ は i 個の合流点をもつ位数 u の河道である。このようにして定義されたノード（位数化され，合流点数によって層別化された河道区分）間には，つぎのような三つの統計則が成り立つ[1),2)]。

$$\frac{1}{4}\text{則}：N(C_u) ／ N(C_{u+1}) = 4 \qquad (u = 1, 2, \cdots, k)$$

$$\frac{1}{2}\text{則}：N({}_iC_u) ／ N(C_u) = (\frac{1}{2})^i \qquad (i = 1, 2, \cdots, N_u - 1)$$

$$\frac{3}{4}\text{則}：N({}_vC_u) ／ N(C_u) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{v-u-1} \qquad (v = u+1, u+2, \cdots, k)$$

ここに，$N(C_u)$, $N({}_iC_u)$および$N({}_vC_u)$は，それぞれ位数 u のノード数，合流点数 i をもつ位数 u のノード数および位数$u+1$ 以上のノードに接続する位数 u のノード数である。

2-2　ネットワーク構造の期待値と分散

以上から，河道分布のネットワークの特性として，C_u とC_{u+1} の接続河道数$N({}_{u+1}C_u)$ の期待値と分散を求めると，それぞれ

$$E(N({}_{u+1}C_u))=3,\quad V_{ar}(N({}_{u+1}C_u))=2 \qquad (1)$$

となる。また，位数 u のノード内における合流点数 i の期待値と分散はそれぞれ

$$E(i)=2,\quad V_{ar}(i)=2 \qquad (2)$$

となる。

3. 河道長と集水面積

位数 $u+1$ のノードの河道長と集水面積は，位数化ノードの定義によって

$$\begin{aligned} L_{u+1} &= \{L_{u+1,i}\} = \{i\cdot \ell_u\} \\ A_{u+1} &= \{A_{u+1,i}\} = \{(i+1)\cdot a_u\cdot A_u\} \end{aligned} \qquad (3)$$

で表現される。ここに，$\{L_{u+1,i}\}$ および $\{A_{u+1,i}\}$ はそれぞれ ${}_iC_{u+1}$の河道長および集水面積の集合である。また，ℓ_uは${}_iC_{u+1}$ 内での合流点間隔，A_uはC_u に対応する集水面積であり，a_u は後述するようにC_uの残流域の面積配分係数である。

3-1　河道長と集水面積の期待値と分散

L_{u+1} と A_{u+1} は確率変量であるが，その分布は，河道分布則と河域地形量ℓ_uまたはA_u自身の分布特性によって構成される複合分布となり，それぞれの確率分布$P(L_{u+1})$と$P(A_{u+1})$は

$$\begin{aligned} P(L_{u+1}) &= \sum_{i=1}^{N_u-1} P(i)\cdot P(i\cdot \ell_u) \\ P(A_{u+1}) &= \sum_{i=1}^{N_u-1} P(i)\cdot P(i+1)\cdot a_u\cdot A_u \end{aligned} \qquad (4)$$

となる。こうした分布特性をもつ地形量の期待値と分散は，それぞれ

$$E(L_{u+1})=E(i)\cdot E(\ell_u),\quad E(A_{u+1})=E(i)\cdot E(a_u\cdot A_u) \qquad (5)$$

および

$$\begin{aligned} V_{ar}(L_{u+1}) &= V_{ar}(i)\cdot E^2(\ell_u)+V_{ar}(\ell_u)\cdot E^2(i) \\ V_{ar}(A_{u+1}) &= V_{ar}(i+1)\cdot E^2(a_u\cdot A_u)+V_{ar}(a_u\cdot A_u)\cdot E^2(i+1) \end{aligned} \qquad (6)$$

で与えられる。

(1)と(2)式から

$$\begin{aligned} V_{ar}(i) &= 2 & E^2(i) &= 4 \\ V_{ar}(i+1) &= 2 & E^2(i+1) &= 9 \end{aligned} \qquad (7)$$

となる。

したがって，L_{u+1} と A_{u+1} の変動係数 $C_{L_{u+1}}$ と $C_{A_{u+1}}$ はそれぞれ

$$C_{L_{u+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}+C_{\ell_u}^2},\quad C_{A_{u+1}}=\sqrt{\frac{2}{9}+C_{A_u}^2} \qquad (8)$$

となる。上式右辺の第１項は合流点数 i によって層別化したための級内分散（ネットワークの分散），第２項は級内分散（河域量自身の分散）にもとづく値である。

3-2　河道長則と集水面積則

位数系の定義と河道配列のランダム性の定義から，C_{u+1} 内の合流点間隔ℓ_uはC_uの河道長L_uと等しいと仮定できる。このような仮定をおくと(5)と(7)式から

$$E(L_{u+1})=2\cdot E(L_u) \qquad (9)$$

となり，河道長比$R_\ell=2$となって多くの実測結果[4]をうまく説明できる。

つぎに，集水面積については(5)と(7)式から

$$E(A_{u+1})=3\cdot E(a_u\cdot A_u) \qquad (10)$$

となる。ここに，a_uはC_uの残流域配分係数であって，$\frac{1}{4}$則と$\frac{3}{4}$則から

$$a_u=\left(1+\frac{E(A_{0u})}{E(A_u)}\right)+\sum_{i=1}^{u-1}\frac{1}{3^i\cdot a_{u-i}} \qquad (11)$$

で表わされる。$E(A_{0u})$は，位数uと位数$u+1$の集水域内の残流面積を示す。これから，a_uは位数によって変化することが予想されるが，集水面積則が成り立つときには集水面積比R_aとの間に

$$a_u=\frac{R_a}{3} \qquad (12)$$

の関係が成り立ち，$R_a=$const. のときには位数によって変らない。ところで，残流域と$\frac{3}{4}$則の効果を$\frac{1}{4}$則に含めてしまうと

$$R_a=4 \qquad (13)$$

となり，実則の結果[4]もこの値をほぼ満足する。

4. 距離スケールによる不変量

距離スケール（地形図の縮尺）によって同一流域の河道の位数化が異なることは当然であるが，河道配列の理論の前提から，ネットワークのトポロジー的構造は変わらない。問題になるのは地形量の変化であって，これらの量の間に距離スケールによって変化しない関係を見出すことは本来分布系である流出系を集中系に置きなおしてモデル設定を行なうために極めて重要である。

4−1　河道密度と河道ひん度

単位面積あたりの河道長を河道密度D，単位面積あたりの河道数を河道ひん度Fとよぶが，その定義と地形則からそれぞれ

$$D_k=\frac{\sum_{u=1}^{k}N_uL_u}{A_k}=\frac{\bar{L}_1}{\bar{A}_1}\left(\frac{R_b}{R_a}\right)^{k-1}\cdot\frac{\left(\frac{R_\ell}{R_b}\right)^k-1}{(R_\ell/R_b)-1} \qquad (14)$$

$$F_k=\frac{\sum_{u=1}^{k}N_u}{A_k}=\frac{1}{\bar{A}_1R_a^{k-1}}\cdot\frac{R_b^k-1}{R_b-1} \qquad (15)$$

で与えられる。ここに，$\bar{L}_1$と$\bar{A}_1$は位数1のノードすなわち単位セルの河道長と面積の平均値である。河道配列の統計則から

$$R_b=4,\quad R_\ell=2,\quad R_a=4$$

であるから

$$D_k=\frac{\bar{L}_1}{\bar{A}_1}\cdot 2(1-2^{-k}) \qquad (16)$$

$$F_k=\frac{1}{\bar{A}_1}\cdot\frac{4}{3}(1-4^{-k}) \qquad (17)$$

となる。

4−2　河域の幾何学的相似則と距離スケールによる不変量

Melton は非常に多数の水系を調べて

$$\frac{F_k}{D_k^2}=0.694 \qquad (18)$$

の関係が成り立つことを実証的に示した。[3] この指摘は，上の関係が性質のちがった多くの水系で成り立つことと，距離スケールによって不変であるという二点で極めて重要である。

(16)と(17)式から理論的な関係として

$$\frac{F_k}{D_k^2}=\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2}\cdot\frac{1}{3}\frac{(2^k+1)}{(2^k-1)} \qquad (19)$$

が得られ，これから

$$\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2}\geqq F_k/D_k^2\geqq\frac{1}{3}\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2} \qquad (20)$$

となる。一般に，こうした関係を示すときは，k がある程度大きいから

$$F_k/D_k^2\doteqdot\frac{1}{3}\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2} \qquad (21)$$

としてよい。この理論的結果と Melton の値から

$$\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2}=2.082\doteqdot 2 \qquad (22)$$

となり，単位セルの面積と河道長の間には，異なった流域でも幾何学的相似則が成りたつことがわかる。つぎに，距離スケールについて考えよう。ある流域を対象として距離スケールが1単位小さくなるということは，地形図の上で位数化河道系の最小単位が1つ大きくなり，最大位数が一つ小さくなることを意味する。すなわち，

$$\text{距離スケール1単位　小}\quad\Rightarrow\begin{cases}k\rightarrow k-1\\ \bar{A}_1\rightarrow\bar{A}_2\\ \bar{L}_1\rightarrow\bar{L}_2\end{cases}$$

と考えることができる。ところが，前述したように

$$\bar{A}_2=4\bar{A}_1\ ,\quad \bar{L}_2=2\bar{L}_1$$

であるから，距離スケールが1単位小さくなったときには

$$\frac{F_{k-1}}{D_{k-1}^2}=\frac{4\bar{A}_1}{(2\bar{L}_1^2)^2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}-1}\right)\doteqdot\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{F_k}{D_k^2} \qquad (23)$$

となり，k がある程度大きいときには上の関係は，距離スケールによって不変である。すなわち，Melton の示した実証的な関係と理論的な河域則は相補的である。さらに，上の関係から

$$\frac{\bar{A}_u}{\bar{L}_u^2}=\frac{\bar{A}_{u-1}}{\bar{L}_{u-1}^2}=\cdots\cdots=\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2}\doteqdot 2 \qquad (24)$$

という位数化河道系における地形量の間に幾何学的な相似則が成り立つことが指摘できる。

4−3　河道長と集水面積との関係

流域の代表的な河道長として，各ノードの河道長の平均の和 L_a をとると

$$L_a=\sum_{u=1}^{k}\bar{L}_u\cdot\frac{R_\ell^k-1}{R_\ell-1}=\bar{L}_1(2^k-1) \qquad (25)$$

で与えられる。これと A_k との関係を求めると(19)と(25)式から

$$\frac{A_k}{L_a^2}=\frac{F_k}{D_k^2}\cdot\frac{3\cdot4^{k-1}}{4^k-1}\doteqdot\frac{\bar{A}_1}{\bar{L}_1^2}\frac{1}{4}\doteqdot\frac{1}{2} \qquad (26)$$

一方，Eagleson は，幹川長 L_m と面積の間に

$$\frac{A_k}{L_m^2}=\frac{1}{3} \qquad (27)$$

の関係を実証的に見出している[4]。この場合の幹川長の定義はいくぶんあいまいであるが，流域の下流端から最上流端までの距離としており，同一位数の河道長としてはもっとも大きい面積をもつ河道長をとっている。(26)と(27) 式から，平均河道長 L_a と幹川長 L_m の間には

$$\frac{L_a^2}{L_m^2} = \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots (28)$$

の関係が得られるが，これは$\frac{1}{2}$則からわかるように，河道配列の分布のひずみ特性を表現しているともいえる。

4−4　単位セルの特性

Horton は，地表面流の流下長の平均$\bar{L}_0$は単位面積あたりの河道長の½に等しいとし，勾配による補正を加えて

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2D_k(1-\overline{\sin\theta_1}/\overline{\sin\theta_0})^{1/2}} \qquad \cdots\cdots (29)$$

の関係を与えた[3]。ここに，$\sin\theta_1$, $\sin\theta_0$はそれぞれ単位セルの河道勾配と斜面勾配である。

(16)と(29)式から勾配による補正項は小さいとすると

$$\bar{L}_0 \doteqdot \frac{\bar{L}_1}{2(1-2^{-k})} \doteqdot \frac{\bar{L}_1}{2} \qquad \cdots\cdots (30)$$

の関係が得られる。すなわち，地表面流の流下長は単位セルの約½であり，さらに(24)式の相似則を考慮し，かつ単位セルの形状を単純化して長方形とすると，単位セルの長さは $2L_1$ であり，かつ地表面流の流下長 L_0は$L_1/2$ であるから，現実の単位セルをよく表わしていよう。

参 考 文 献

1) Ishihara,T., Iwasa,Y. and Takasao,T. : Stochastic Study of Channel Distribution in River Basins, Proc. IHS, 1967.

2) 石原藤次郎，高棹琢馬，瀬能邦雄 ： 河道配列の統計則に関する基礎的研究，京大防災研究所年報，第 12 号， 昭 44.

3) Chow, V.T. : Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill Book Company, 1964.

4) Eagleson,P.S. : Dynamic Hydrology, McGraw-Hill Company, 1970.