

変動降雨による非線形流出系の解析

東京工業大学工学部	正会員	吉川	秀夫
同 上	正会員	日野	幹雄
同 上	正会員	○四俣	正俊
同 上		水村	和正

I はじめに

流出解析の研究に際しての大きな困難のひとつは、流出系の非線形性に起因している。このことは流出系を水理学的に研究する場合にも、ブラックボックスの手法を用いる場合にも等しく言える。非線形性といっても種々様々のものがあるが、未知関数およびそれを線形変換した関数の積、あるいは巾乗型の非線形項は、われわれにとってなじみ深いものである。そのような項を含む非線形問題は容易に解けるというわけではないが、比較的扱い易く、場合に応じて種々の工夫された解法が用いられる。いわく摂動法、いわく数値計算法云々。筆者らは基本的姿勢として非線形系の特性を、ひとめで容易に理解できる形に表わすことを目指している。したがって用いる手法として、何らかの近似による線形化がひとつ考えられるが、ここではまず、入力（流入量ないしは降雨量）を、一定の値に小さな変動が加わったものとし、微小項を省略することによって系を線形近似することにした。すなわち定常状態にある系の入力変動に対する出力変動の応答を簡明な形で表わすことが第一歩である。入力変動としては正弦波を用いる。その理由は線形系の調和解析の考え方と同じであって、系が線形近似されうる範囲では、重ね合せによって任意の変動に対する応答を求め得るし、それよりもまず周波数応答は系の直観的把握を大いに助けるからである。また系の非線形性の如何によっては、こうして得られた結果が何らかの工夫によってかなり大きな変動に対しても有効である可能性があり、そうなればより一般的な入力に対して系の特性をつかむことが可能である。そこまで行かなくとも、変動に対する解析は、最終的な状態における系の特性—たとえばダムが満水に近いときの流入変動の影響—をつかむことに通じ、有意義であると考えられる。

ここでは以上のような考え方にもとづくふたつの試みについて述べた。いずれも基礎の方程式はよく知られた簡明なものであるが、それについて若干ふれておいた。またはじめの方法は水理学的な方程式から出発しており、あとの方法は多分にブラックボックス的考え方による方程式に関するものである。

II 変動横流入に対する非線形流出現象

図-1で表わされるような、横流入のある定勾配、一様広矩形断面水路をモデルとして考える。連続の式および抵抗の式を次の形で表わす。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \cdot B$$

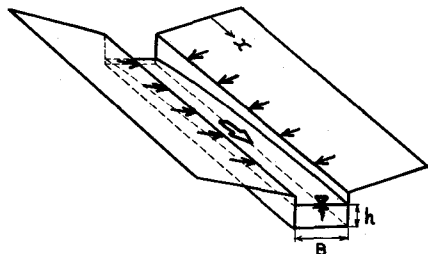


図-1

$$v = K \cdot h^\xi$$

ただし t ; 時間。 x ; 上流端からの距離。 B ; 水路巾。

A ; 水路断面積。 Q ; 流量。 v ; 平均流速。 h ; 水深。

q ; 横流入。水路への降雨強度に換算して表わしている。

K, ξ ; 抵抗則にかかわる係数。

マニングの式を用いれば $K = \sqrt{1}/n$, $\xi = 2/3$ である。

$A = B \cdot h$, $Q = A \cdot v$ および二の式をオ一の式に代入し、関数関係を明瞭に書けば

$$(1) \quad \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + K \cdot (1 + \xi) \cdot h^\xi(x, t) \cdot \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = q(x, t)$$

横流入および水深を、定常的なものと変動分とに分けて、

$$(2) \quad q(x, t) = q_1(x) + q'(x, t), \quad h(x, t) = h_1(x) + h'(x, t)$$

まず変動がない場合の横流入 $q_1(x)$ に対する定常流水深 $h_1(x)$ を求める。(1) 式にこれらを代入すると

$$(3) \quad K \cdot (1 + \xi) \cdot h_1^\xi(x) \cdot \frac{dh_1(x)}{dx} = q_1(x)$$

変数分離によつてこれを解くと

$$(4) \quad h_1(x) = \left\{ \frac{1}{K} \int q_1(x) dx \right\}^{1/(1+\xi)} + C$$

特に $q_1(x) = q_0 = \text{const.}$ の場合には

$$(4)' \quad h_1(x) = \left(\frac{1}{K} \cdot q_0 x \right)^{1/(1+\xi)} + h_1(0)$$

次にこれに変動を加える。すなわち (2) を (1) に代入し、(3) を考慮すると

$$(5) \quad \frac{\partial h'(x, t)}{\partial t} + K \cdot (1 + \xi) \cdot h_1^\xi(x) \cdot \frac{\partial h'(x, t)}{\partial x} + K \cdot (1 + \xi) \cdot h_1^{\xi-1}(x) \cdot \frac{dh_1(x)}{dx} \cdot h'(x, t) = q'(x, t)$$

ただし $h' \ll h_1$ として

$$(h_1 + h')^\xi = h_1^\xi \cdot \left(1 + \frac{h'}{h_1} \right)^\xi \approx h_1^\xi \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{h'}{h_1} \right)$$

と近似し、さらに $h' \cdot \partial h' / \partial x$ の項は、他の項に比べてひとつ高次の微小となるので省略した。 $h_1(x)$ はすでに得られているため、方程式 (5) は $h'(x, t)$ に関する線形方程式である。ここで (5) 式の入力 $q'(x, t)$ として、場所的な任意の関数に時間的な正弦波を乗じたものを考える。それには (5) 式が線形なので $Q_\omega(x) \cdot e^{i\omega t}$ を考えればよい。ただし $Q_\omega(x)$ は複素関数である。この入力の解を求めておけば、一般の入力 $q'(x, t)$ に対する解も (定常的でかつ非周期的な場合を除いて) t に関するフーリエ級数あるいはフーリエ積分によつて求めることができる。方程式 (5) の係数は t に関して定数であるから $Q_\omega(x) \cdot e^{i\omega t}$ なる入力に対するこの方式の (充分時間がたつて初期条件を考慮しなくてよいという意味で) 定常的な出力は $H_\omega(x) e^{i\omega t}$ で与えることができる。ただし $H_\omega(x)$ は未知の複素関数である。この入力と出力とを (5) 式に代入して $e^{i\omega t}$ で除せば、 $H_\omega(x)$ に関する一

階の線形常微分方程式(6)を得る。

$$(6) \quad K \cdot (1+\xi) \cdot h_1^\xi(x) \cdot \frac{dH_\omega(x)}{dx} + \left\{ K \cdot (1+\xi) \cdot \xi \cdot h_1^{\xi-1}(x) \cdot \frac{dh_1(x)}{dx} + i\omega \right\} \cdot H_\omega(x) = Q_\omega(x)$$

この方程式の解は、

$$(7) \quad H_\omega(x) = e^{-s(x)} \cdot \left[\int e^{s(x)} \cdot r(x) \cdot dx + C \right]$$

ただし、 C ; 積分定数

$$s(x) = \int P(x) dx$$

$$P(x) = \xi \cdot \frac{1}{h_1(x)} \cdot \frac{dh_1(x)}{dx} + i \cdot \frac{\omega}{K \cdot (1+\xi) \cdot h_1^\xi(x)}$$

$$r(x) = \frac{Q_\omega(x)}{K \cdot (1+\xi) \cdot h_1^\xi(x)}$$

(7) によって原理的には任意の変動入力に対する水位の変動が求まる。

さて実際の応用へのアプローチとして、時間的にも場所的にも一定な横流入に、場所的に一定で時間的には正弦波の変動が乗った場合の水面形を求める。前と同様に変動入力を $a \cdot e^{i\omega t}$ とおき境界条件として $h_1(0) = 0$ を与えて、(4)' の $h_1(x)$ を (7) に代入すると

$$(8) \quad H_\omega(x) = x^{-\xi/(1+\xi)} \cdot \exp(-i \cdot \frac{\omega}{K \cdot K'} \cdot x^{1/(1+\xi)}) \cdot \left[\frac{a}{K \cdot (1+\xi)} \cdot \left(\exp(i \cdot \frac{\omega}{K \cdot K'} \cdot x^{1/(1+\xi)}) \cdot dx \right) + C \right]$$

ただし、 $K' = (\frac{q_0}{K})^{\xi/(1+\xi)}$

この解は $x = 0$ の近傍では使えないが、これは境界条件の与え方のせいであってこの際やむを得ない。あとで若干の改良を要する点である。

マンングの式によれば $\xi = 2/3$ であるが、これだと(8)式の積分が初等関数で表わせない。

$\xi = 2/3$ という値は必ずしも本質的なものではないゆえ、若干値をかえて $\xi = 1$ とおいてみると積分が実行できて、

$$(9) \quad H_\omega(x) = \frac{a \cdot q_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - i \cdot \frac{a}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{q_0}{K}} + \frac{c}{\sqrt{x}} \cdot \exp(-i \cdot \sqrt{\frac{\omega}{K \cdot q_0}} \cdot \sqrt{x})$$

が得られる。(9) によって $a \cdot e^{-i\omega t}$ に対する出力もたゞちに求まるゆえ、これから場所的に一定で時間的には正弦波の変動入力($a \cdot \cos \omega t$)に対する水面変動を求めると、積分定数 C のかかっている項に関しては、振巾が $\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{q_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{q_0}{K}}$ 位相おくれが $\text{Arctan}(\frac{\omega \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{K \cdot q_0}})$ でありまた

C のかかっている項に関しては、振巾が $C / \sqrt{x}$ 、位相おくれが $\sqrt{\frac{\omega}{K \cdot q_0}} \cdot \sqrt{x}$ である、入力

と周期の等しい正弦波変動が得られる。 C のかかっている項は減衰しながら下流へ伝播してゆく波を表わしている。

Ⅲ 貯留関数法の線形近似

貯留関数を流出量の巾乗型と仮定すれば、貯留関数法によって流出を求める式は次のように書ける

$$\frac{ds(t)}{dt} = r(t) - q(t) \quad (\text{連続の式})$$

$$s(t) = \left(\frac{1}{C}\right)^{1/\alpha} \cdot q(t) \quad (\text{貯留関数})$$

ただし、 s : r と q に関する見かけの貯留量

r : 流入量

q : 仮想的な流出量。 q を遅滞時間だけおくらせたものが実際の流出量

$\left(\frac{1}{C}\right)^{1/\alpha}, \frac{1}{\alpha}$: 貯留関数に関わる係数

t : 時間

ふたつの式をまとめて $s(t)$ に関する方程式になおせば

$$(10) \quad \frac{ds(t)}{dt} + C \cdot s^\alpha(t) = r(t)$$

この式は α が 2 に近いことを考えれば、(たとえば総合貯留関数として提案されているのは、 $s = 40.3 \times q^{0.5}$) 筆者らが以前に発表したダムのモデルと同じタイプの方程式である。^(*)したがって同じ線形近似を行えば、越流ダムの場合のように流入 $r(t)$ と流出 $q(t)$ との関係をほゞつかみ得ることが期待される。そこで上述の論文にしたがって (10) 式を線形近似する。すなわち [定常的流入 + 周期 T の正弦波変動流入]

$$(11) \quad r(t) = r_0 + r' \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

に関して (10) 式を線形化すると

$$(12) \quad \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{T_0} \cdot s(t) = r(t)$$

となる。ただし

$$T_0 = \frac{1}{C \cdot \alpha \cdot s_0^{\alpha-1}}$$

$$s_0 = \frac{1}{1.04} \cdot \alpha \sqrt{\frac{r_0}{C}}$$

(11) 式の流入に対して (12) 式の流出量 $s(t)/T_0 = q(t)$ は

$$q(t) = r_0 + q' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \varphi\right)$$

で与えられる。ここで q' および φ は、変動成分の周波数応答として次のように決まる。

$$(13) \quad \frac{q'}{r'} = \frac{T/2\pi \cdot T_0}{\sqrt{1 + (T/2\pi \cdot T_0)^2}}$$

$$(13)' \quad \phi = \text{Arctan} \left(\frac{1}{T/2\pi \cdot T_0} \right)$$

さらに上述の論文で指摘したように、〔定数＋正弦波〕型以外の種々の入力に対しても、平均流入量 r_0 を適当に定めてやることによって(12)式が有効であることが確かめられれば、時定数 T_0 と周波数応答(13), (13)' によってこの系の特性をほぼつかみ得たことになる。さらに型の決まった入力に対する応答を求めておくこともできる。ダムに適用した例をあげておくと、流入 $r(t)$ としてハイドログラフ

$$r(t) = R \cdot \frac{t}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

R ; ピーク流量 τ ; ピーク到達時間

を与えれば、流出 $q(t)$ は

$$q(t) = R \left\{ \zeta \cdot \frac{1}{(1-\zeta)} \cdot \left(e^{1-t'/\zeta} - e^{-1-t'} \right) + \frac{1}{1+\zeta} \cdot e^{1-t'} \cdot t' \right\}$$

ただし $\zeta = \frac{T_0}{\tau}, \quad t' = \frac{t}{\tau}$

$q(t)$ のピーク流量およびピーク到達時間を求めることは、さして労力を要しない。(**)

IV おわりに

非線形流出系の線形近似による解析をふたつあげたが、共に現在続行中のため、結論にかえて、問題点と方向を述べておく。

まずオ一の方法の基礎方程式について。連続の式とマニング型の抵抗則の組合せはよく用いられるが、この抵抗則はそもそも等流に対して作られたものであり、水深の場所的变化による圧力差が完全に無視されているゆえ、この圧力差が他の項に比べて小さくない場合には無効である。たとえば横流入がない場合の定常流を求めようとしても等流解以外は求まらない。(4)'式で境界条件を0で与えると、解は求まるが水面勾配の影響を考えないからその付近では不合理である。実際問題としてこの解のうちの少なくとも $dh_1(x)/dx$ が底勾配よりも大きい値をもつ範囲では無効と考えるべきであろう。その範囲の解は捨てればよいとして、この方法でもひとつ困るのは変動解の積分定数を決められないことである。その値に関しては1とした場合と2/3あるいは1/2とした場合を数値を入れて比較する予定である。さらに得られた結果の適用性を検討しなければならない。

オ二の方法について言えば、これは以前の研究の結果を貯留関数法にあてはめただけであるが、ダムの場合と同様に適用範囲が広いことが確かめられれば、流出の傾向を把握するのによい方法であると考えられる。他の入力として適当な形に仮定したハイトグラフを取扱ってみたい。

参考文献 *) 東京工業大学土木工学科研究報告 NO.10 吉川・四俣

**) オ8回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集 吉川・四俣