流出の非線型性について—流出現象の質的理解への寄与—

東京工業大学　工学部　　日野　幹雄

要　旨：　まず、水文現象における質的理解の重要性を強調した。同時に、局所的力学法則に立脚する Dynamic hydrology と全系的応答の立場に立つ Stochastic hydrology の結合を試み、流出現象の非線型性の質的解明を行った。

1. 序〔水文学に関する著者の考え方〕：こゝ十数年の間、水文学は新しい方向を求めて動き出した。すなわち、記述的学問から解析的学問への変換であり、力学法則に立脚する Dynamic hydrology と確率情報理論に拠る Stochastic hydrology の確立である。ひるがえって、水文学（というよりは複雑な現象を対象とする学問）は、記述的方法による理解を抜け出るとともに、量的な予測・実測との一致を求める方向にすゝむ。この場合、量的なものを要求しすぎるあまり、種々の仮定やパラメーターが導入され、それにともなって現象の本質的把握がぼかされてくるという反論がある。つまり、すべてのものを数量化しようとするあまり、本質を捉えることをのがすことになりかねない。著者は、量的なものの重要性を否定するものではないが、質的なもののもつ根元的特質を軽じてはならないと考える。（山手環状線を円で表示することで、われわれの要求するほとんどすべての情報が与えることができるではないか。）

著者は、水文学に対して次のような一つの立場を強調したい。水文現象には、いろいろな要素がからみ合って極めて複雑であり、その一つ一つの要素の影響を明らかにする必要がある。しかも、とくに水文現象を複雑にしているのは、その非線型性であり、したがって水文現象の本質的理解には複雑さの質的把握が極めて重要である。Dynamic hydrologyは、流体運動の最も基本的な（局所的）法則から出発するもので、一つの正攻法的立場である。しかし、一方において、運動および連続の方程式は局所的力学的・量的バランスを記述するものゆえに、全系的見透しの点では必ずしも有利ではない。他方、Stochastic hydrology の立場は得られた水文情報から客観的になるべく多くの情報を得ようとすることにあるが、データ収集の粗さのためもあり全体的把握となり、かつ、データ自身を説明しえない。この二つの立場は一見異なるようにみえ、互に己の立場を主張するあまり他の立場を認めないという傾向がなきにしもあらずである。こゝで、著者は(i)前述の質的特性の解析と、(ii) Dynamic hydrology と Stochastic hydrology の立場の融和を計りたいと思う。

こゝで、(i)についてさらに敷衍する。流出現象の非線型性は、主に流体の抵抗則の非線型性にある。例えば、洪水のピーク流量は降雨強度の一乗よりは遙かに急激に増加し、ピークの到達時間は降雨強度とともに早くなる。後に示すように、もし抵抗則が線型ならば、unit hydrograph は決して教科書にあるような‵歪んだ富士山型′とはなりえない。こうした特性は、抵抗則が非線型の $u \propto h^{\alpha}$, $Q \propto h^{\alpha+1}$ によるものであり、マニング則では $\alpha = 2/3$ である。もし、われわれが、神になったとして α の値をこれよりわずかに変えたとしても（例えば $\alpha = 2/3 \to 1$）、上述の流出現象の本質はそこなわれることはないはずである。こうした著者の立場は、トポロジー的考えに立つと言って

良いであろう。量的把握が質的把握に優るとは一概には云えないし、その逆の場合も少くないのである。今我々は、質的理解の精度を高める位置にいるとも言えよう。

2. 基礎方程式

流出現象のうち、理想化された表面流出を取扱う。流体運動の基礎方程式としては，連続式と(1)運動方程式のかわりに抵抗法則(2)を採る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} = q(x, t) \tag{1}$$

$$u = \alpha h^m \tag{2}$$

$$R = uh = \alpha h^{(m+1)} \tag{3}$$

こゝに、h = 水深、R = 流量、q = 降雨強度、α = 係数、m = 指数。　抵抗則としてマニング則を用いれば、n = 粗度、I = 水面勾配として

$$u = \left(\frac{1}{n} I^{1/2}\right) h^{2/3} \tag{4}$$

である。式(3)(4)はむしろ、次の型に書くこと方が一般性をもつ。

$$R = ah + bh^2 + ch^3 + \cdots\cdots \tag{5}$$

したがって、式(1)(5)を一つにまとめると式(6)となる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (a + 2bh + 3ch^2 + \cdots\cdots)\frac{\partial h}{\partial x} = q(x, t) \tag{6}$$

3. C.M.W. 展開

いま、流出系への入力 $q(x, t)$ を不規則変量とすれば、(非線型系からの)出力 $h(x, t)$ も不規則であり、次のように表示しうる。[1)2)] 厳密に云えば、入力がガウス分布をもつ白色雑音でなければならない。このとき、出力 $h(x, t)$ は

$$h(x, t) = \int K_1(x; t-\sigma) \cdot Q_1(\sigma)\, d\sigma$$

$$+ \iint K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2) \cdot Q_2(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + \cdots \tag{7}$$

こゝに、K_1、K_2、… K_n = 非確率的核関数、Q_1、Q_2、… Q_n = 確率関数の Hermite 多項式表示(補遺参照)。

a) 変数の Fourier 変換による表示

式(7)に現れる各変数の Fourier 変換による表示を次のように導入する。

$$h(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{h}(x, \omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{8}$$

$$K_n(\sigma_1, \sigma_2 \cdots, \sigma_n, x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \tilde{K}(\omega_1, \omega_2 \cdots, \omega_n; x)\, e^{-i(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \cdots)}\, d\omega_1\, d\omega_2 \cdots d\omega_n \tag{9}$$

$$Q_n(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_n;x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\tilde{Q}_n(\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n)\,e^{-i(\omega_1\sigma_1+\omega_2\sigma_2+\cdots)}\,d\omega_1\cdots\cdots d\omega_n \tag{10}$$

式(7)に式(8)(9)(10)を代入すれば、式(11)が得られる。

$$\tilde{h}(\omega;x)=\tilde{K}_1(\omega;x)\cdot\tilde{Q}_1(\omega)+\frac{1}{2\pi}\int\tilde{K}_2(p,\omega-p;x)\cdot\tilde{Q}_2(p,\omega-p)dp+\cdots\cdots \tag{11}$$

また、上式を x に関して偏微分すれば、

$$\frac{\partial\tilde{h}(\omega;x)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{K}_1(\omega;x)}{\partial x}\cdot\tilde{Q}_1(\omega)+\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\tilde{K}_2(p,\omega-p;x)}{\partial x}\cdot\tilde{Q}_2(p,\omega-p)dp+\cdots \tag{12}$$

b) 基礎方程式の Fourier 変換

基礎方程式(6)の Fourier 変換を行う。式(6)の左辺オ2項は、例えば、次のように変形しうる。

$$\int h(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}e^{i\omega t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\tilde{h}(\sigma)e^{-i\sigma t}\,d\sigma\,\frac{\partial h}{\partial x}e^{i\omega t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\tilde{h}(\sigma)\int\frac{\partial h}{\partial x}e^{i(\omega-\sigma)t}\,dt\,d\sigma$$

$$=\int\tilde{h}(\sigma;x)\frac{\partial\tilde{h}(\omega-\sigma;x)}{\partial x}d\sigma$$

したがって、式(6)の Fourier 変換の結果は次のようになる。

$$-i\omega\,\tilde{h}(\omega)+\left[a\frac{\partial\tilde{h}}{\partial x}+\frac{b}{\pi}\int\tilde{h}(\sigma)\frac{\partial\tilde{h}(\omega-\sigma)}{\partial x}d\sigma+\cdots\cdots\right]=\tilde{Q}_1(\omega) \tag{13}$$

c) 流出核を決定する偏微分方程式

式(13)に式(11)(12)を代入する。

$$\begin{aligned}&-i\omega\tilde{K}_1(\omega)\cdot\tilde{Q}_1(\omega)+a\frac{\partial\tilde{K}_1(\omega,x)}{\partial x}\cdot\tilde{Q}_1(\omega)+\frac{b}{\pi}\int\tilde{K}_1(\sigma)\frac{\partial\tilde{K}_1(\omega-\sigma,x)}{\partial x}\tilde{Q}_1(\sigma)\tilde{Q}_1(\omega-\sigma)d\sigma\\&+\frac{(-i\omega)}{2\pi}\int\tilde{K}_2(p,\omega-p)\tilde{Q}_2(p,\omega-p)dp+\frac{a}{2\pi}\int\frac{\partial\tilde{K}_2(p,\omega-p,x)}{\partial x}\tilde{Q}_2(p,\omega-p)dp\\&+\frac{b}{2\pi^2}\int\tilde{K}_1(\sigma)\tilde{Q}_1(\sigma)\int\frac{\partial\tilde{K}_2(p,\omega-\sigma-p)}{\partial x}\cdot\tilde{Q}_2(p,\omega-\sigma-p)\,dp\,d\sigma\\&+\frac{b}{2\pi^2}\int\frac{\partial\tilde{K}_1(\omega-\sigma)}{\partial x}\cdot\tilde{Q}_1(\omega-\sigma)\int\tilde{K}_2(p,\sigma-p)\tilde{Q}_2(p,\sigma-p)dp\,d\sigma+\cdots\cdots=\tilde{Q}_1(\omega)\end{aligned} \tag{14}$$

上式の両辺に $\tilde{Q}_1(-\omega)$ あるいは $\tilde{Q}_2(-\omega_1,-\omega_2)$ を掛けて平均を採る。この際、確率関数 $Q_n(\sigma_1,\cdots\cdots,\sigma_n)$ の直交性(補遺参照)を利用すれば、流出核 $\tilde{K}_1(\omega)$, $\tilde{K}_2(\omega_1,\omega_2)$ ………に関する偏微分方程式を得る。式(11)、(12)をオ2項迄で打ち切れば、線型流出核と2次の非線型流出核に関する偏微分方程式は、次のようになる。

$$\begin{cases} -i\omega\widetilde{K}_1(\omega,x)+a\dfrac{\partial\widetilde{K}_1(\omega,x)}{\partial x}+\dfrac{2b}{\pi}\displaystyle\int\widetilde{K}_1(\sigma)\dfrac{\partial\widetilde{K}_2(-\sigma,\omega,x)}{\partial x}d\sigma=\delta(x_0) & (15) \\ -i\omega\widetilde{K}_2(\omega_1,\omega_2,x)+a\dfrac{\partial\widetilde{K}_2(\omega_1,\omega_2,x)}{\partial x}+2b\widetilde{K}_1(\omega_1)\dfrac{\partial\widetilde{K}_1(\omega_2,x)}{\partial x}+0(\widetilde{K}_2\cdot\widetilde{K}_2)=0 & (16) \end{cases}$$

d) 線型流出核について

上の(c)で求められた式(15)(16)の解を一気に求めることは、可成り難しい。そこで、まず$\widetilde{K}_2\cong 0$と考えて、線型核 $\widetilde{K}_1(\omega)$および逆Fourier変換により$\widetilde{K}_1(t)$　を求めてみる。これは、後に論ずるように、流出現象の線型性についての基本的問題点を提出する。式(15)で左辺の才3項を無視すれば、

$$-i\omega\widetilde{K}_1(\omega,x)+a\frac{\partial\widetilde{K}_1(\omega,x)}{\partial x}=\delta(x_0) \tag{15a}$$

となり、これより流出過程が純線型である場合の流出核の周波数域での解およびその逆Fourier 変換による実時間領域での解を次のように得る。

$$\widetilde{K}_1(\omega,x)=e^{i\omega(x-x_0)/a}+c\,e^{i\omega x/a} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} K_1(t,x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{i\omega(x-x_0)/a}+c\,e^{i\omega x/a}]\,e^{-i\omega t}\,d\omega \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{i\omega(x-x_0-at)/a}+c\,e^{i\omega(x-at)/a}]\,d\omega \\ &=\delta\,[(x-x_0-at)/a] \end{aligned} \tag{18}$$

式(18)の意味するところは、〝時刻t、場所 x_0 に発生した単位降雨による流出(一滴の雨だれの影響)は、もし流出系が線型ならば変形することなく速さaで流下する〟ことを意味している。

この結果は、しいてC.M.W.展開を用いるまでもなく、元の基礎方程式の解として求めるもともできる。(日野・水村(1971):未発表)

e) 線型流出系の hydrograph

式(18)で示される解は、いわば線型流出系のグリーン関数である。もし、流域全面に均一強さq_0の降雨がτ時間続けば、流域長さLの下流点でのhydrographは、式(17)より次のようになる。

$$\begin{aligned} H(t,L)&=\int_0^L\int_0^\tau\delta\,[(L-x_0)/a-(t-\sigma)]\,q_0\,d\sigma\,dx_0 \\ &=q_0\int_0^L U(t-x/a)\,dx \end{aligned} \tag{19}$$

こゝに、$U(z)$：$z=0$　のとき　$U(0)=1$。

式(19)の関係を模式的は，したがって式(20)のようになる。

$$H(t,\tau)\begin{cases} =\ q_0\,t & (0\le t\le L/a) \\ =\ q_0(\tau-t) & (\tau\le L/a\ ,\ \ L/a<t\le 2L/a) \\ =\ q_0\,L/a & (\tau>L/a\ ,\ \ L/a<t\le 2L/a) \end{cases} \tag{20}$$

$$= q_0 \,(L/a - t) \qquad (\tau > L/a,\ 2L/a < t)$$

以上のこの理論の最も初期的結論は、水文学の基本概念である" unit hydrograph " の考え方に対して、二つの疑問を投げかける。すなわち、

(i) 流域が線型であれば、単位降雨について一つのhydrographがあり、その重ね合せで流出が求まるという単純な重ね合せ原理すら、流出現象には成立しない。流出には、流域長さと平均流下流速より決る流下時間の影響を考慮しなければならない。この事は、合理式の考えからも導きれうるし、また豊国(昭和42年)Newton-Vinyard(1967)、竹内・吉川(昭和44年)が実側データあるいは特性曲線法による数値計算からunit hydrographは単位時間の選び方や降雨時間と流達時間の関係により異ることを示したことを理論的に証明したものである。

(ii) もし、流出系が純線型であれば、unit graphは 三角形または台形で前後対称である。実測により求められたunit hydrographが(基底流出を差し引いてなおかつ)前後非対称性を示すことは、とりもなおさず、弱い降雨についてすら流出系が線型ではないなによりの証拠を提出するものである。流域を扇状形にえらび上述の方法を再展開しても、 この hydrograph の対称性は変わらない。

f) 非線型流出核について

非線型流出核を求めるのには、たとえ2次近似で打ち切った場合でも、式(15)(16)のような複雑な式を解かなくてはならない。それには、電子計算機による数値解に頼らざるをえないと思われる。

そこで、式(16)に線型核 $\tilde{K}_1(\omega_1)$(式(17))を代入して、2次の非線型核のオ一次近似を求めてみる。これを厳密解 $\tilde{K}_2$ と区別するために $\tilde{K}_2^0(\omega_1, \omega_2)$ と記する。式(16)(17)より

$$a\frac{\partial \tilde{K}_2^0(\omega_1, \omega_2, x)}{\partial x} - i\omega_1 \tilde{K}\,\omega_1, \omega_2, x) = -2i\left(\frac{b}{a}\right) e^{i(\omega_1+\omega_2)(x-x_0)/a} \tag{21}$$

となり、これを解けば2次の非線型流出核の周波数域での解として

$$\tilde{K}_2^0(x, \omega_1, \omega_2) = -2b\,e^{i(\omega_1+\omega_3)(x-x_0)/a} + \text{const}\; e^{i\omega_1 x/\alpha} \tag{22}$$

を得る。上式の逆Fourier変換を行えば、2次の非線型流出核のオ1近似解 $\tilde{K}_2^0(x, t_1, t_2)$ として、式(23)が得られる。

$$\begin{aligned} K_2^0(x; t_1, t_2) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint \tilde{K}_2^0(x; \omega_1, \omega_2)\, e^{-t(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \Big[-2b\,\sigma\,[(x-x_0)/a - t_1]\,\delta\,[(x-x_0)/a - t_2] \\ &\qquad + \text{const}\;\delta\,[(x-at_1)/a]\,\delta\,[t_2] \Big] \end{aligned} \tag{23}$$

上式の意味は、時刻 $t = 0$ に場所 $x = x_0$ に生じた単位降雨(δ −関数的)による非線型効果は、速さ a で下流に伝わり、2次性は流量の大きさとしてまず現われることを示している。前述の解法では線型核と非線型核の相互作用が弱い形でしか取り入れられていないので、流れの伝播速度に2次効果は含まれていない。もし、式(15)(16)を厳密に解けば、伝播速度にも非線型効果が入り、一滴降雨の成

分配分、非線型成分の分散性が現れることになる。流域下流部での hydrograph の非線型部分は、前と同様に式(23)を x および τ に関して積分することにより求められる。

4. 結論

この論文では、次の2点を中心にした議論を提出した。ⓐ Dynamic hydrology と Stochostic hydrologyの融合とⓑ水文現象に関する質的理解（ descriphe とは全く異る）を深めること。手法としては、Burgers Turbulence に用いられるC.M.W.（ Cameron･Martin･Wiener)展開法を拡張して用いた。その結果、単位図法の考え方には疑点があること、流域の一点での入力（一滴降雨）に対する線型・非線型の一般化された応答関数を流体力学の基礎方程式より導くことができた。

（補　　　　遺）

確率関数　q(t)に関する直交多項式は次の性質をもつ。

$$\begin{cases} Q_1(t) = q(t) \\ Q_2(t_1, t_2) = Q_1(t_1)Q_1(t_2) - \delta(t_1 - t_2) \\ Q_3(t_1, t_2, t_3) = Q_1(t_1)Q_1(t_2)Q_2(t_3) - Q_1(t_1)\delta(t_2 - t_3) - Q_1(t_2)\delta(t_1 - t_3) \\ \qquad - Q_1(t_3)\delta(t_1 - t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle Q_1(t_1)Q_1(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) \\ \langle Q_2(t_1, t_2)Q_2(t_3, t_4) \rangle = \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) + \delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \tilde{Q}_1(\omega_1)\tilde{Q}_1(\omega_2) \rangle = 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_2) \\ \langle \tilde{Q}_2(\omega_1, \omega_2)\tilde{Q}_2(\omega_3, \omega_4) \rangle = (2\pi)^2 [\delta(\omega_1 + \omega_2)\delta(\omega_2 + \omega_4) + \delta(\omega_1 + \omega_4) \cdot \\ \qquad \delta(\omega_2 + \omega_3)] \end{cases}$$

1) Wiener, N : Nonlineor Problems in Random Theory, MIT Press (1958)
2) 吉川・日野・鋤柄：C.M.W。展開法による非線型流出の解析：第15回水理講演会講演集(1958)
3) 吉川・竹内：特性曲線を利用した流出解析についての考案，流出機構モデルの総合化に関する研究　文部省科学研究費特定研究最結報告書(1970)