

降水量時系列を考慮した多地点月流量シミュレーションについて

北海道大学工学部 正員 ○星 清

北海道大学工学部 正員 山岡 勲

1 はじめに

最近における経済社会の発展と人口の都市集中化にともない、水需要の不足が将来の地域開発上の大きな制約要因となってきた。水需要圏と供給圏の間のアンバランスを解消するためには、水資源の広域的な高度利用が重要な課題となってきた。

水利用の対象となるのは主として河川の表流水であり、その供給源は降水量である。すなわち長期間にわたる水資源の時間的、地域の変動様相を把握するためには降水量時系列の解析が重要な要因となる。従来から降水量時系列の解析と流量時系列の解析が独立に行われてきた背景には、流量資料の不完備さがあげられよう。流量観測資料に関しては観測所の配置と密度の問題点、統計年数の不足、水位から変換されるための誤差による流量観測値の信頼性の問題がある。

本論文では水資源計画を策定するために必要な月流量の長期間変動過程を次に述べる手法を用いてシミュレートするものである。

- (1) 水資源システムの入力となる多地点月降水量シミュレーションを行なう。
- (2) 一流域内に点在する雨量観測所からの情報量を最大限に活用するために面積降水量（合成変量）を算定し、これを流量時系列と一対一に対応させる。
- (3) 降水量時系列を入力とするシステムモデルを作り、月流量をシミュレートする。
- (4) 本研究が対象とする降水、流出現象では観測所間に内部相関性が存在するので、それを有効に利用するためマトリックス法を導入する。

2 月降水量時系列シミュレーション

流出過程が降水現象からの変換系の結果である以上、降水量時系列のシミュレーションの結果の精度が流量時系列のシミュレーションのそれに強く影響を及ぼすことになる。

降水量資料についてまず注目すべき点は、ある一地点だけの水文量が比較的整備され、解析に必要な近傍の観測所の水文量が時系列としてはかなり短かいという事実である。数学的には、独立変数が1個で従属変数が数個という一般に使われている重回帰線法と逆の立場にある。この事実に基づいて、数多くの雨量観測所の降水量を同時に発生させる一方法を述べる。

月降水量をシミュレートするための基本式として、次の数学モデルを仮定する。

$$Y = AX + Be \quad (1)$$

ここで、 Y : 衛星観測所の標準化された $m \times N$ データマトリックス

X : 基幹観測所の標準化された $1 \times N$ データマトリックス

e : 確率変動成分で $m \times N$ マトリックス

A : $m \times 1$ の係数マトリックス

B : $m \times m$ の係数マトリックス

m : 衛星観測所の個数

N : 標本数

(1)式の右から X と Y の転置マトリックスをそれぞれ乗ずると、係数マトリックス A 、 B は次式で与えられる。

$$A = Y X^T / N \quad (2)$$

$$B B^T = Y Y^T / N - (Y X^T / N) \cdot (X Y^T / N) \quad (3)$$

ここで、 X^T 、 Y^T 、 B^T : それぞれ X 、 Y 、 B の転置マトリックス

$Y X^T / N$: 基幹観測所と衛星観測所の相関係数ベクトル

$Y Y^T / N$: 衛星観測所間の相関係数マトリックス

(3)式の $B B^T$ は対称マトリックスであり、マトリックス B の各要素を求めるには、 $m^2 - \{m(m+1)/2\}$ の条件が不足する。平方根法によれば対称マトリックスは2つの相互に転置された三角マトリックスの積に分解することが可能であるが、別の手法を用いてマトリックス B の要素を決定する。(3)式の $B B^T$ は対称マトリックスなので、任意の相関係数マトリックスとみなすことができるのでこれを便宜的に R とおく。

$$R = B B^T \quad (4)$$

相関分析によれば次式が成立することが知られている。

$$R = \sum_{p=1}^m a_p a_p^T \quad (5)$$

ここで、 a_p : 第 p 直交因子の因子構造ベクトル

m : 相関マトリックスの階数

(5)の意味するところは、相関マトリックスは各々の因子構造の積をすべての直交因子について加えあわせたものに等しいということである。すなわち(3)式の係数マトリックス B を求めることは、互いに直交する m 個の因子の構造ベクトルを求めることに相当する。第 p 因子に直交するための相関マトリックスを第 p 残差相関マトリックスといい、次式で与えられる。

$$R_p = R_{p-1} - a_p a_p^T \quad (6)$$

各々の p 因子における各変量の重みベクトルを w_p であらわすと次式が成立する。

$$a_p = R_{p-1} w_p \quad (7)$$

a_p を求める際構造ベクトルの平方和を最大にしようとすれば、次式がその指標となる。

$$V = a_p^T a_p = w_p^T R_{p-1}^2 w_p \quad (8)$$

又、第 p 因子の分散は 1 であるから

$$w_p^T R_{p-1} w_p = 1 \quad (9)$$

(9) 式の条件のもとで (8) 式を最大にするように w_p を求めると結局、次式が得られる。

$$(R_{p-1} - \lambda I) a_p = 0 \quad (10)$$

(10) 式から明らかに R_{p-1} に関して λ は固有値、 a_p はそれに対応する固有ベクトルになる。

ただし、 I : 単位マトリックス 0 : ゼロベクトル

ゆえにマトリックス B の要素を求めることは (6) 式の残差相関マトリックスを用いて、互いに直交する m 個の因子についての固有ベクトルを求めることに一致する。係数マトリックス A 、 B が決定されれば、(1) 式から確率変動成分は次式によつて与えられる。

$$e = B^{-1} (Y - AX) \quad (B^{-1} : B \text{ の逆マトリックス}) \quad (11)$$

(11) 式から観測所毎の e の成分については、平均値 0、標準偏差 1 にならなければならない。 e の各成分の分布関数ができるだけ $N(0, 1)$ に近くなるように原系列に正規変換をほどこせば、モンテカルロ法によつて衛星観測所の月降水量を同時にシミュレートすることが可能となる。

3 面積降水量の決定

降水は流域というフィルターを通して流出過程に変換されるわけで、このとき平均化作用をうける。それゆえ一地点だけの降水量で面積降水量を代表させることは地点の固有変動成分が流出過程に影響を及ぼす危険性が大である。幸い、一流域内に含まれる雨量観測所の個数は流量観測所のそれに比して多いので、それらの観測所から得られる情報を活用するモデルを考える。Fig. - 1 は流域を単純化したもので、図中の Q は流量観測地点、 S_i は雨量観測地点をあらわす。又 P を流量と一対一に対応する面積降水量として、 P を求めるモデル式として次式を仮定する。

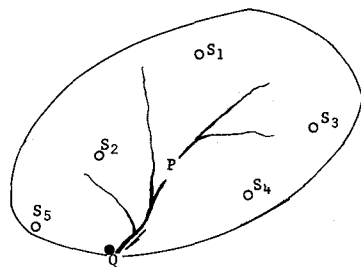


Fig. - 1 Scheme of Drainage Basin

$$P = Z w \quad (12)$$

ここで、 P : $N \times 1$ の標準化された合成変量ベクトル Z : 標準化された $N \times n$ データマトリックス
 w : $n \times 1$ の各観測所に対する標準重みベクトル n : 観測所数 N : 標本数

(12) 式の重みベクトルは観測所間の内部相関性から決定される。このとき、数学的指標として合成変量と各観測所ができるだけ高い相関を示すように重みベクトルを求める。結果的には前節で述べた

第1因子の重みベクトルが(12)式の標準重みベクトルに相当し、次式で与えられる。

$$w = a / \sqrt{a^T R a} \quad (13)$$

ここで、 a : 構造ベクトル R : 雨量観測所間の相関係数マトリックス

4 月流量時系列シミュレーション

前節までで月降水量時系列をシミュレートすることが可能となったので、月流量時系列をシミュレートするためのモデル式を考える。システムモデルの入力としては、表流水への供給源が降水量であるという観点から降水量だけを考える。このとき河川の流出量が同じ期間内の降水量と正確には対応しないで、両者の対応に時間の遅れが存在するため前月の降水量も入力と考える。又春期の融雪量に寄与する入力は流域に貯留されている積雪としての降水量を考える。

月流量をシミュレートするための基本式として、次の数学モデルを仮定する。

$$Q(I) = AP(I) + BP(I-1) + CP_a + De(I) \quad (14)$$

ここで、 $Q(I)$: I 月の標準化された $n \times N$ 流量データマトリックス

$P(I)$: I 月の標準化された $n \times N$ 降水量データマトリックス(面積降水量)

P_a : 11月から2月までの標準化された $n \times N$ 累加降水量マトリックス(面積降水量)

$e(I)$: I 月の確率変動成分をあらわす $n \times N$ マトリックス

A, B, C, D : $n \times n$ の係数マトリックス n : 流量観測所個数 N : 標本数

係数マトリックスを求める手法は、月降水量時系列のシミュレーションの場合と同等で、係数マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q(I)P(I)^T}{N} & \frac{Q(I)P(I-1)^T}{N} & \frac{Q(I)P_a^T}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P(I)P(I)^T}{N} & \frac{P(I)P(I-1)^T}{N} & \frac{P(I)P_a^T}{N} \\ \frac{P(I-1)P(I)^T}{N} & \frac{P(I-1)P(I-1)^T}{N} & \frac{P(I-1)P_a^T}{N} \\ \frac{P_a P(I)^T}{N} & \frac{P_a P(I-1)^T}{N} & \frac{P_a P_a^T}{N} \end{bmatrix}^{-1} \quad (15)$$

$$DD^T = \frac{Q(I)Q(I)^T}{N} - A \left\{ \frac{P(I)Q(I)^T}{N} \right\} - B \left\{ \frac{P(I-1)Q(I)^T}{N} \right\} - C \left\{ \frac{P_a Q(I)^T}{N} \right\} \quad (16)$$

$$e(I) = D^{-1} \{ Q(I) - AP(I) - BP(I-1) - CP_a \} \quad (17)$$

(15)式のマトリックスの中は明らかに相関係数(相互相関係数)からなる小マトリックスであり、右辺の逆マトリックスの項は対称マトリックスになる。(16)式のマトリックス D の要素は(3)式と同様に、対称マトリックスの固有ベクトルに一致する。(17)式から観測所毎の平均値、標準偏差はそれぞれ0、1にならなければならない。降水量のシミュレーションと同様に(17)式の $e(I)$ の分布関数

ができるだけ $N(0, 1)$ に近くなるように原系列に正規変換をほどこし、さらに前節で発生させた面積降水量を用いて、モンテカルロ法によつて月流量時系列をシミュレートすることができる。

5 適用例と考察

上に展開した月降水量の発生から月流量シミュレーションまでのシステムモデルの妥当性を石狩川流域の水文資料によつて検討する。

(1) 式および(14)式の係数マトリックスの決定の際の標本数は、降水量解析では 19 個、流量解析では 17 個である。月降水量のシミュレーションにおいて基幹観測所を旭川に設定した。旭川における標本数は 79 個であるので、両シミュレーションとも 79 年間について行なつた。

なお、北海道においては冬期間は水位計の凍結や故障のため欠測が多く、解析が不可能なので流量解析は 4 月から 10 月までについて行なつた。

対象流域は石狩川上流流域と雨龍川流域である。流量観測地点は伊納、多度志、橋本の 3 地点、雨量観測地点は旭川、上川、愛別、永山、美瑛、西神楽、朱鞠内、幌加内、沼田の 9 地点である。

Fig - 2 は対象流域と採用観測所の位置を示したものである。

Table - 1 は流量観測地点に対応する流域面積と(12)式によって面積降水量を算定する際の雨量観測所を区分したものである。

原系列に正規変換をほどこす際、次の 6 種の変換型によつて試算した。

- (1) 原系列のまま (2) ピアソン III 型 (3) 対数変換 (4) 対数ピ

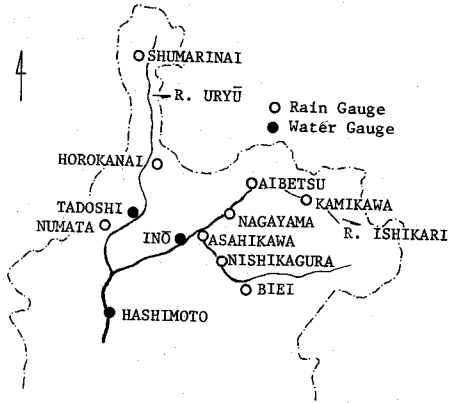


Fig - 2 Location of Selected Basin and Stations

Table - 1 Adopted Stations

Water Gauge	Drainage Area [km ²]	Rain Gauge
INO	3378.6	ASAHIKAWA, KAMIKAWA, AIBETSU, NAGAYAMA, BIEI, NISHIKAGURA
TADOSHI	1015.5	SHUMARINAI, HOROKANAI
HASHIMOTO	5460.0	ASAHIKAWA, KAMIKAWA, AIBETSU, NAGAYAMA, BIEI, NISHIKAGURA, SHUMARINAI, HOROKANAI, NUMATA

Table - 2 Correlation Matrices of $\bar{P}$ (Square Root Transformation)

Observed Values				Simulated Values			
March				March			
1.000	1.000	0.908	0.988	1.000	1.000	0.873	0.983
0.692	1.000	1.000	0.956	0.733	1.000	1.000	0.942
0.978	0.813	1.000	1.000	0.982	0.836	1.000	1.000
April				April			
May				May			
1.000	1.000	0.691	0.971	1.000	1.000	0.703	0.971
0.828	1.000	1.000	0.839	0.845	1.000	1.000	0.848
0.985	0.906	1.000	1.000	0.986	0.918	1.000	1.000
June				June			
July				July			
1.000	1.000	0.842	0.991	1.000	1.000	0.798	0.989
0.900	1.000	1.000	0.901	0.916	1.000	1.000	0.875
0.992	0.945	1.000	1.000	0.994	0.953	1.000	1.000
August				August			
September				September			
1.000	1.000	0.766	0.982	1.000	1.000	0.744	0.982
0.842	1.000	1.000	0.868	0.829	1.000	1.000	0.853
0.990	0.900	1.000	1.000	0.991	0.889	1.000	1.000
October				October			
Pa				Pa			
1.000	0.628	0.975		1.000	0.723	0.975	
	1.000	0.776			1.000	0.853	
		1.000				1.000	

アソンⅢ型 (5) 平方根変換 (6) 立方根変換

正規変換型の判別基準はひずみ度ととがり度によって決定した。その結果月降水量については平方根変換、月流量については対数ピアソンⅢ型が最も正規化に近いと考えられたので、それらの変換型を採用した。

旭川を基幹雨量観測所として(1)式によって衛星観測所の月降水量をシミュレートしたのち、(12)式によって各流域毎の面積降水量を計算した結果を地点間相関マトリックスでTable-2に示した。この表からもわかるように

実測値とシミュレートした値に有意な差は見られず、(1)式の月降水量シミュレーションモデルは妥当であったと考えられる。

次に流量に対応する地点別の面積降水量を(14)式の降水量の項に入れて月流量シミュレーションを行なった結果がTable-3と

Table-4である。Table-3は実測値(obs.)とシミュレート値(sim.)を対比して平均値(m)と標準偏差(σ)で示したものであり、Table-4は相関マトリックスで示したものである。これらの表から、

Table - 3
Means and Standard deviations of Monthly Steamflow [mm]

STATION MONTH		INO		TADOSHI		HASHIMOTO	
		m	σ	m	σ	m	σ
Mar.		58.23	16.41	121.97	118.17	66.21	23.51
Apr.	obs.	223.47	56.94	310.22	96.77	285.16	70.84
	sim.	231.38	66.84	308.33	243.53	286.25	84.59
May	obs.	212.92	74.02	288.89	141.96	233.64	80.35
	sim.	202.66	62.79	257.93	173.86	232.31	114.57
Jun.	obs.	124.67	32.25	60.60	18.81	95.38	23.50
	sim.	124.43	26.42	60.40	15.93	96.79	29.21
Jul.	obs.	95.15	30.72	73.20	48.82	81.33	38.49
	sim.	96.73	36.06	69.02	41.47	80.99	45.41
Aug.	obs.	149.25	83.16	103.03	72.17	139.53	82.17
	sim.	142.75	82.27	95.58	52.95	132.30	76.59
Sep.	obs.	102.03	33.87	75.47	29.61	95.60	36.37
	sim.	100.50	37.32	82.84	55.25	96.10	49.84
Oct.	obs.	94.87	50.51	76.03	26.18	86.69	40.29
	sim.	98.37	49.54	76.42	24.83	88.23	37.12

Table - 4 Correlation Matrices of Streamflow

Observed Values				Simulated Values			
April				April			
1.000	1.000	-0.262	0.307	1.000	1.000	-0.299	0.301
0.804	1.000	1.000	0.396	0.623	1.000	1.000	0.291
0.626	0.738	1.000	1.000	0.421	0.515	1.000	1.000
May				May			
June				June			
1.000	1.000	0.512	0.641	1.000	1.000	0.652	0.593
0.703	1.000	1.000	0.403	0.796	1.000	1.000	0.378
0.760	0.871	1.000	1.000	0.874	0.934	1.000	1.000
July				July			
August				August			
1.000	1.000	0.824	0.827	1.000	1.000	0.801	0.862
0.854	1.000	1.000	0.827	0.791	1.000	1.000	0.664
0.891	0.810	1.000	1.000	0.800	0.726	1.000	1.000
September				September			
October				October			
1.000	0.594	0.855		1.000	0.535	0.897	
	1.000	0.697			1.000	0.624	
		1.000				1.000	

ら、雨龍川流域の多度志を除いては、実測値とシミュレート値はよく対応している。多度志の4月と5月の標準偏差が大きくなっている原因は(14)式の確率変動成分に関する係数マトリックスDの多度志の要素が大きな値を持っているために、シミュレート値の中に1000 mm以上の流出高が現われているためである。多度志において、シミュレート値が実測値と余りよく対応していないのは、支川と本川を含む並列系では流域特性が互いに異なり、支川の影響が消失するためと考えられる。従って小流域の流出解析を単独に行なうのも一方法かと考えられる。

以上利水計画において対象となる降水流出系を空間的変動を考慮しながら単純モデルで説明してきたが、係数マトリックスの物理的意味の解明が今後の課題となろう。