

1 ま え が き

筆者はさきに水流蛇行の成因についての理論的研究を発表した〔1, 2, 3〕。この理論は以前に行われた木下博士の実験結果（そのほとんどはフルード数が1より大きいか1に近いもの）にはかなりよく合っているが、外国で行われたフルード数が1よりずっと小さい場合の実験結果には余りよく合わない。そこで後者にもよく合うように意図して前報理論の修正を試みた。その計算には未だ研究不足の個所があるが、蛇行理論の今後の改良の方向を打診するための一資料ともなればと思い、試論として報告するものである。

2 筆者の前報理論の要点とその物理的解釈

長方形断面水路河床面上に3次元正弦河床波（図-1）をかく乱として与え、このかく乱の不安定性（増巾）につき研究した。まず、河床面上に与えられた増巾機構は流砂量のいわゆる非対称性（図-2の河床波形状は断面2について対称であるが、流砂量は同断面に関して非対称で、上流側断面の方が遮蔽された下流側の対応する断面より常に大きい）によるものであると考えた。流砂量の非対称性は流砂量を表わす式として次の形式の式をとることにより組み入れることができる。

$$G(s; s', t) = \left\{ 1 + \alpha \partial \eta(s - \delta, s', t) / \partial s \right\} f \left\{ u(s - \delta, s', t) \right\} \dots\dots (1)$$

ただし、 G は S 軸方向の流砂量（容積レート、単位 S' 巾当り）、 S は河床面上流線（図-3）に沿ってとった曲線座標、 S' はそれに直交する座標、 α は無次元の定数、 δ は局所的な掃流力とそれに応ずる掃流砂量との間に存すべきいくらかの遅れの距離で $\delta = \delta(U)$ と考える。また、 f は流速の与えられた関数

$$\text{で、前報では} \quad f = m U^n \dots\dots\dots (2)$$

とした。式（1）において、非対称性は $\alpha \partial \eta / \partial s$ の項によってとり入れられている。

ところで、流砂量の非対称性によれば、いかなる2次元および3次元の河床かく乱波もつねに不安定となり、増巾しうることは容易に理解されよう。しかし、式（1）中の δ の存在のゆえにそこ

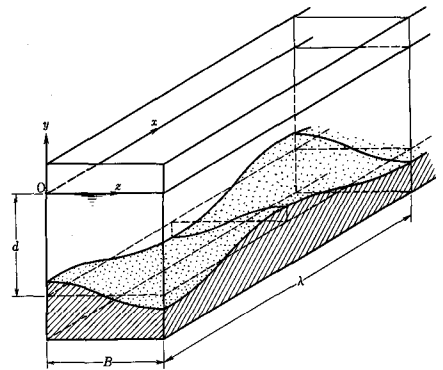


図-1 河床面上に与えられたかく乱

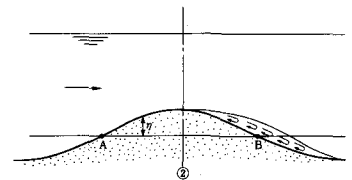


図-2 流砂量の非対称性

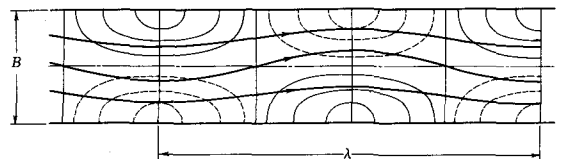


図-3 河床面上の流線

に不安定となりうる場合についての制限が生じてくる。この遅れの距離 δ は安定化（河床波の消滅）に寄与する要素である。そこで、流砂量の非対称性に関する要素 α とこの δ とを組み合わせでつづった1つの無次元積

$$C = \alpha / \left\{ \delta / (U^2 / 2g) \right\} \dots\dots\dots (3)$$

に着目すると、 C は不安定性に寄与する1つのパラメーターとなりうるものであると考えられる。上式を書き直すと

$$\delta = (\alpha / C) (U^2 / 2g) \dots\dots\dots (4)$$

となり、流速が大きくなる程 δ の値は増大し、ために安定化の要素の影響が増大する。この結果、フルード数がある程度以上に大きくなると河床かく乱波は消失して河床は平坦となることが理解される。

一方、流砂量は U の n 乗に比例し、したがってもし水深を一定にして考えるときはフルード数の n 乗に比例するのであるから、フルード数が余り小さすぎると流砂量自体が小さくなり、この結果河床波の増巾率も小さくなる。

そこで、フルード数が1より小さい場合には、上述の2つの事柄の組合せから、与えられた河床かく乱波の増巾率を最大ならしめるフルード数と波長の関係がでてくる。これが蛇行波長を与える関係式となる。このような増巾機構によって説明できると考えられる河床波をここでは“第1群河床波”と称する。

つぎに、フルード数が1より大きい場合、すなわち射流の場合には、水面上にその時のフルード数に応じた波長の空間的に静止した3次元的水面波が起りうる。すなわち、ある何等かの外的原因により静止水面上に3次元的なセイシュがつくられたとすると、それはその波長、水深、水路巾に応じた伝播速度 ω で上流側に移動せんとするが、これと等しい速度 U の一様流を重ね合わせると、セイシュは空間的に静止した波形となる。そのとき、河床面上にはこれに対応した交互の3次元河床波がつくられ、これが式(1)の非対称性の機構で増巾される。したがって、この場合の河床波形成の主要原因はセイシュといえる。このようにして形成されると思われる3次元河床波をここでは“第2群河床波”と称することとする。

図-4 は3次元河床波の発生領域を $d/B=0.08$ の場合について再記したものであるが、第1群と第2群の発生領域がフルード数に対して連続的につながっており切れ目がない点が1つの特徴である。木下博士が以前に行われた実験結果〔3〕のほとんどがフルード数が1に近いか1より大きい場合、すなわち第2群に属すると思われるものであるにも関わらず、河床波の形状がフルード数が1よりかなり小さい実際の河川の河床波の形状と酷似しており、射流と常流との本質的な差異を認めうるような点が全く存在しなかったのは、3次元河床波発生領域について上述のように切れ目がないことによるものであると解釈しうるであろう。比較のために、図-5 は2次元河床波の発生領域についての前報

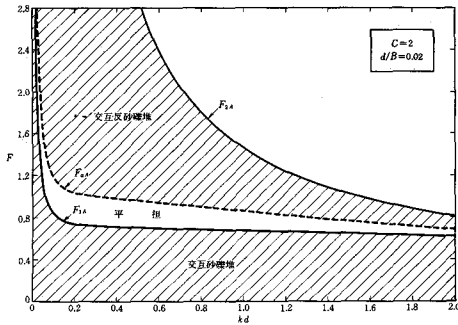


図-4 $d/B=0.08$ の場合の
3次元河床波発生領域

ものであると解釈しうるであろう。比較のために、図-5 は2次元河床波の発生領域についての前報

における筆者の理論結果を再録したものである。ここではフルード数が1附近において不安定領域に切れ目があり、これを境としてこれより下が砂堆領域、上が反砂堆領域となり、発生する河床波の性質が相互に変化する。

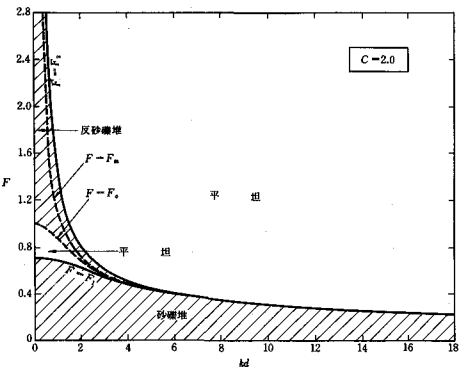


図-5 2次元河床波発生領域

3. 前報理論の“修正”の一つの試み

前報においては

$$\alpha / \left[\delta / (U^2 / 2g) \right] = \text{const.} = C \dots\dots\dots (5)$$

と考えたが、ここでは新につきのように考える。

$$\frac{\alpha}{\delta / (U^2 / 2g)} = C \cdot \left(\frac{\pi d / B}{\beta d} \right)^p \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 d は水深、 B は水路巾、 $\beta d = \sqrt{(kd)^2 + (\pi d / B)^2}$ 、 k は河床波の x 方向の波数で $k = 2\pi / \lambda$ 、 λ は波長、 p はべきの定数である。また、式(5)の C は前報の値と同じとし、 $C = 2.0$ と考える。いま、 B を有限の値として、 $\lambda \rightarrow \infty$ とすると、 $\beta d \rightarrow (\pi d / B)$ となり式(6)は前報2次元のかく乱の場合に用いた式(5)に一致する。

λ が ∞ よりも段々と小さくなり、 B と同じ程度の大きさの値にまで減少してくる過程を考えると、河床面上の流線は図-6の点線(矢印)のよう

に側方に逃げるので、式(5)の α の値について考えると、流れが実線のように直進して波頂を越す場合の α の値に比べて $[(\pi d / B) / \beta d]^p$ 倍に減少するものとする $[(\pi d / B) / \beta d \leq 1]$ 。

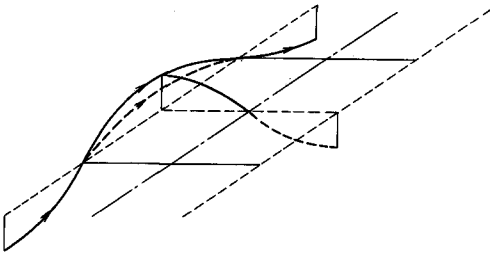


図-6 流線の屈折

計算に使用する基本式は前報と同じであるので、説明を省略して式のみを以下に列記する。

水流の基本式： $\nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (7)$

河床面上に与えたかく乱： $\eta = a(t) \sin k(x - U_b t) \cos \ell z \dots\dots\dots (8)$

河床波により起される水面変動： $\xi = A(t) \sin k(x - U_b t) \cos \ell z \dots\dots\dots (9)$

水流に対する境界条件：

$y = 0$: $\xi_t + U \xi_x = \phi_y \dots\dots\dots (10)$

$y = 0$: $\phi_t + g \xi + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = \text{const.} \dots\dots\dots (11)$

$y = -d$: $\eta_t + U \eta_x = \phi_y \dots\dots\dots (12)$

“非対性”流砂量の式： $T = m \left[1 + \alpha \partial \eta (s - \delta, s', t) / \partial s \right] \left\{ \phi_x (s - \delta, s', t) \right\}^n \dots\dots\dots (13)$

河床変動の式： $\eta_t + (T_1)_x + (T_2)_z = 0 \dots\dots\dots (14)$

T_1, T_2 : T の x および z 方向成分、添字ローマ字：座標による偏微分記号

これらの式を用いて $a(t)$ および U_b を求め、新に式(6)で与えられる C を用いると次式をうる。

$$a(t) = a(0) \exp \left[(m g^{n/2} \alpha / C) d^{-2+(n/2)} (k d)^2 F^2 \right. \\ \left. \times \left\{ C - \frac{n}{2} \left(\frac{\beta d}{\pi d/B} \right)^p (k d)^2 F^2 \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \right\} t \right] \dots\dots\dots (15)$$

$$U_b = m n g^{n/2} d^{n/2} k F^n \left[\frac{\alpha^2}{2 n C} k d \left(\frac{\beta d}{\pi d/B} \right)^p F^2 \right. \\ \left. + \frac{k}{\beta} \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \right] \left[1 + \frac{\ell^2}{4 k^2} \right] \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

また、 $A(t)/a(t)$ および ϕ の中には式(6)の C は入っていないので、前報と同じであり、それらはつぎのようである。

$$\frac{A(t)}{a(t)} = - \frac{F^2 k^2 d / \beta}{\left\{ \tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta) \right\} \cosh \beta d} \dots\dots\dots (16)$$

$$\phi = U x - \frac{U k}{\beta} a \frac{1 + (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta y}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \dots\dots\dots (17)$$

式(15)右辺の中カッコ内の項を Γ とおくと、 $\Gamma = 0$ および

$$\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta) = 0 \dots\dots\dots (18)$$

が河床波の発生限界線を与える。そこで $\Gamma = 0$ を F^2 についてとくと次式が得られる。

$$F^2 = \left\{ \begin{matrix} F_2^2 \\ F_1^2 \end{matrix} \right\} = \frac{(\beta d)^2}{2 M (k d)^4 \tanh \beta d} \left[\frac{(k d)^2}{\beta d} (C + M) \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{(k d)^4}{(\beta d)^2} \{ (C + M)^2 - 4 C M \tanh^2 \beta d \}} \right] \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{ただし, } M = (n/2) [\beta d / (\pi d/B)]^p \dots\dots\dots (20)$$

である。いま、 $(C + M)^2 \gg 4 M C \tanh^2 \beta d$ と考えられるから、式(19)から次式をうる。

$$F_1^2 = \frac{C}{C + M} \frac{\beta d \tanh \beta d}{(k d)^2} \dots\dots\dots (21), \quad F_2^2 = \left(1 + \frac{C}{M} \right) \frac{\beta d}{(k d)^2 \tanh \beta d} \dots\dots\dots (22)$$

また、式(18)から次式をうる。

$$F_a^2 = \beta d \tanh \beta d / (k d)^2 \dots\dots\dots (23)$$

図-7, 8の斜線部分は式(21), (22), (23)から計算されたそれぞれ $d/B=0.02$ および 0.08 における交互河床波(3次元河床波)の発生領域を図示したものである。計算においては $n=4$ および $p=2$ と仮定した。式(16)および(15・a)から明らかなように

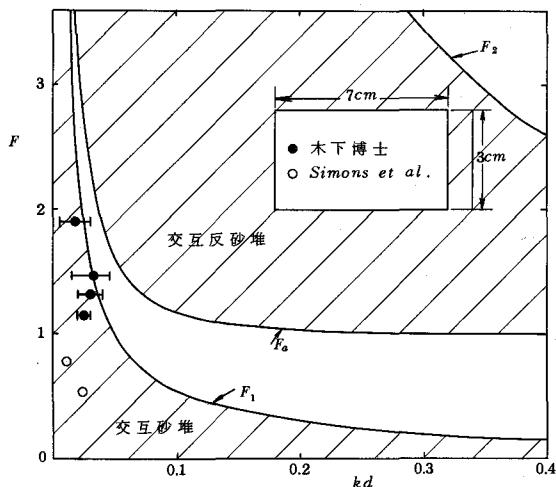


図-7 3次元河床波の発生領域 ($d/B = 0.02$ の場合)

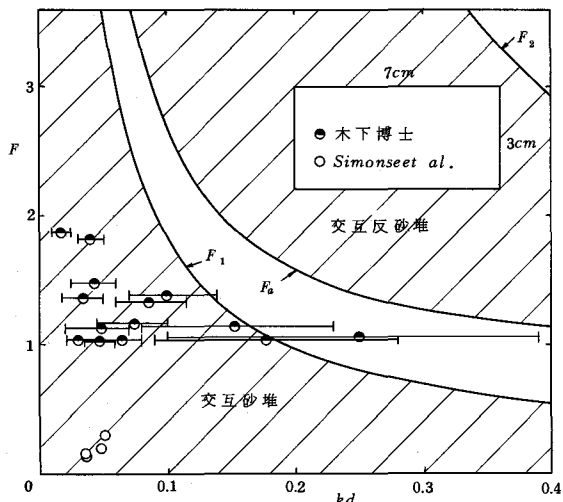


図-8 3次元河床波の発生領域 ($d/B = 0.08$ の場合)

$F < F_a$ のときは $A/a < 0$, $U_b > 0$ (交互砂堆)

$F_a < F < F_2$ のときは $A/a > 0$; $U_b < 0$ の場合と $U_b > 0$ の場合とあり (反砂堆)

また、式(17)から

$$u = U + \frac{U k^2}{\beta} a \frac{1 + (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta y}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \sin k(x - U_b t) \cos \ell z \quad (24)$$

これを式(8)と比較すると、 $F < F_a$ の場合 (交互砂堆の場合) には、

$$\eta > 0 \text{ の部分では } u > U, \quad \eta < 0 \text{ の部分では } u < U$$

であり、 η_{max} の点 (図-3 の実線等高線の中心点—河床波頂) 上で u_{max} となり、 η_{min} の点 (河床波底) 上で u_{min} となることがわかる。また、同じく式(17)から w を求めて流線の蛇行方向を調べてみると、 $F < F_a$ の場合には図-3 のような形状となる。

図-7, 8 中に記入された実験値は木下博士のもの〔5〕とChang-Simons-Woolhiserのもの〔6〕である。これらの図を前報の理論結果として先に記載した図-4と比較すると、今回の理論においてはフルード数の小さいところでの河床波の発生領域がかなり狭くなっており、第1群の実験結果 (Chang 等のもの) を説明するのに前報よりは都合がよくなっているように見える。

4. 結 び

不安定性に寄与するパラメーター C を定義する関係式を新に式(6)で与えて、前報理論の“修正”を行った。このような修正を行えば、第1群 (フルード数の比較的小さい水流の蛇行) 河床波の発生を流砂量の非対称性に関係するパラメーター α , 遅れの距離 δ , 河巾・波長比 B/λ およびフルード数 F の4つの枠の中で組み立てられたモデルによる理論である程度説明することができる。

しかし、式(6)の物理的な意味づけは未だ極めて不十分であり、この検討を今後行ってゆかねばならない。なお、式(6)の他に

$$\frac{\alpha}{(\delta/d)/F} = C, \frac{\alpha}{k\delta/F} = C, \text{あるいは} \frac{\alpha}{\beta\delta/F} = C$$

のような仮定を試みてそれぞれに対する理論結果(図-7, 8に相当するもの)も得ているが, それらはいずれも第1群の実験結果を説明するためには式(6)の仮定を用いる場合よりもさらに程遠くなる。

本理論はポテンシャル理論によっており摩擦を考慮していないものであるから, 摩擦を考慮しなければ第1群の河床波の発生を現象的に説明することが不可能であるかどうかは上述の C についての物理的な意味づけの研究の結果いかんによっているように思われる。

なお, 本研究の遂行に当っては, 昭和45年度文部省科学研究費(特定研究 関東甲信越地区の河川災害に関する総合的研究 研究代表者 嶋 祐之教授)および46年度同研究費(試験研究 河川流速公式の再検討に関する研究)による補助を受けたことを記して謝意を表する。

引用文献

- 1) 林 泰造・川上克巳: 移動河床に生ずる二, 三の不安定現象, 土木学会第13回水理講演会講演集, 昭和44年2月, pp. 109-116.
- 2) 林 泰造: 河川蛇行の成因についての研究, 土木学会論文報告集第180号, 1970年8月, pp. 61-70.
- 3) 林 泰造: On the cause of the initiation of meandering of rivers, Trans. JSCE, Vol.2 Part 2, Oct. 1972, pp.235-239.
- 4) 木下良作: 河床における砂礫堆の形成について, 土木学会論文集, 第42号, 昭和32年, pp. 1-21.
- 5) 木下良作: 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料第36号, 昭和37年。
- 6) H.Y. Chang, D.B.Simons and D.A.Woolhiser: Flume experiments on alternate bar formation, Proc. ASCE, Vol. 97, WW1, Feb. 1971, pp. 155-165.