

河床波の発生について

(財) 電力中央研究所 正員 白 砂 孝 夫

1. 緒 言

河床波 (sand waves) を理解するには、河床波の初生機構、その発達機構および十分に発達し比較的安定した形状を保っている河床波の安定平衡機構について系統的に調べる必要があると思われる。本報告では、その一部として、二次元移動床水路に発生する河床波を対象にして初生機構、安定平衡機構について考察を加えた。すなわち、2.においては河床波初生の原因として流速の時間的、空間的変動をとりあげ、その場合の河床変動と流速変動との関係についての検討を行なった。3.においては安定平衡状態における河床波の運動が形態の移動と河床表面の流動化した移動層の運動がら成つていことに着目し、それらを二成層ポテンシャル流れとして表わす解析モデルを作成した。そして河床波を境界面に発生する内部波と考え、内部波の安定理論により河床波の安定平衡領域の検討を行なった。

2. 河床波の初生機構 — 流速変動による河床の起伏の発生 —

空間的に流速が変動すれば、平均流速より小さいところでは堆積が、大きいところでは洗掘が生じその結果、河床に起伏が発生することが予想される。これを数式で表現すればつぎのようになる。

点 x , 時刻 δ における流砂量 $q(x, \delta)$ (見かけの体積) が河床近傍の流速 $u(x, \delta)$ の s 時間平均に比例すると仮定すれば

$$q(x, \delta) = \frac{m}{s} \int_{\delta-\frac{s}{2}}^{\delta+\frac{s}{2}} u(x, \alpha) d\alpha = m\bar{u} + \frac{m}{s} \int_{\delta-\frac{s}{2}}^{\delta+\frac{s}{2}} u'(x, \alpha) d\alpha \quad (2-1)$$

ここに、 m は係数、 $\bar{u}$ は平均流速、 u' は平均流速からの変動を表わす。

2-1 式を用いると河床変動式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial z(x, \delta)}{\partial \delta} = -\frac{\partial q(x, \delta)}{\partial x} = -\frac{m}{s} \int_{\delta-\frac{s}{2}}^{\delta+\frac{s}{2}} \frac{\partial u'(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \quad (2-2)$$

ここに、 $z(x, \delta)$ は河床高である。

2-2 式を時間で積分すれば t 時間の河床変動高 $\eta(x, t)$ がつぎのように得られる。

$$\eta(x, t) = -\frac{m}{s} \int_0^t d\delta \int_{\delta-\frac{s}{2}}^{\delta+\frac{s}{2}} \frac{\partial u'(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \quad (2-3)$$

初期河床を平坦とすれば、 $\eta(x, t)$ は t 時間後の平均河床からの河床高である。

同様に、 $(x + \xi)$ 点における t 時間の河床変動高 $\eta(x + \xi, t)$ は次式で表わされる。

$$\eta(x + \xi, t) = -\frac{m}{s} \int_0^t d\tau \int_{\tau-\frac{s}{2}}^{\tau+\frac{s}{2}} \frac{\partial u'(x + \xi, \beta)}{\partial x} d\beta \quad (2-4)$$

河床変動の空間規模を知るために、2-3, 2-4 両式を用いて t 時間の河床変動の空間相関 $R_\eta(\xi)_t$ を求めるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 R_{\eta}(\xi)_t &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \eta(x, t) \eta(x + \xi, t) dx \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{m^2}{s^2} \int_0^t d\delta \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial u'(x, \alpha)}{\partial x} d\alpha \int_0^t d\tau \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{\partial u'(x + \xi, \beta)}{\partial x} d\beta \\
 &= - \frac{m^2 u'^2}{s^2} \int_0^t d\delta \int_0^t d\tau \int_{-\delta/2}^{\delta/2} d\alpha \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{d^2 Ru(\xi, \alpha - \beta)}{d\xi^2} d\beta \quad (2-5)
 \end{aligned}$$

ここに、 $Ru(\xi, \alpha - \beta)$ は流速変動の時空間相関係数であり、 ξ は空間のずれ、 $\alpha - \beta$ は時間のずれを表わしている。2-5式は河床変動の空間相関と流速変動の時空間相関との関係を表わすものであるが、これによれば、河床変動が空間的な規模を有するには流速変動が時空間相関を持ち、かつその空間2階微分が存在する必要があることを示している。

今、 $Ru(\xi, \alpha - \beta)$ を時間軸、空間軸に对称なつぎの関数を仮定して解析を進める。

$$Ru(\xi, \alpha - \beta) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{\ell^2}\right) \cdot \exp\left[-\frac{\{(\alpha - \beta) - a\xi\}^2}{t_*^2}\right] \quad (2-6)$$

2-6式よりテイラー・カルマン相関係数 $R_T(\xi)$ およびオイラー相関係数 $R_E(\tau)$ はそれぞれ、

$$R_T(\xi) = \exp\left(-\frac{t_*^2 + a^2 \ell^2}{\ell^2 t_*^2} \xi^2\right) \quad (2-7)$$

$$R_E(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{t_*^2}\right) \quad (2-8)$$

と表わされ、流速変動の spatial integral scale A および integral time scale T はそれぞれつぎのようになる。

$$A = \int_0^\infty R_T(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell^2 t_*^2}{t_*^2 + a^2 \ell^2}} \sqrt{\pi} \quad (2-9)$$

$$T = \int_0^\infty R_E(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} t_* \quad (2-10)$$

図-1 は河床変動の分散 $\sigma^2(t) = R_{\eta}(0)_t$ の時間変化を $t = 2t_*$ で1になるように図示したものである。これによれば $t = 2t_*$ まではほぼ一様に増大することが知れる。図-2 は河床変動の空間相関係数 $R_u(\xi)_t$ の時間変化を図示したものである。これによれば平均規模は時間の増大とともに多少増加する傾向があるようである。いずれの場合にも t をさらに大きくしていけばある値に収束していく性

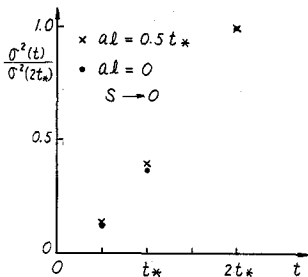


図-1 分散の時間変化

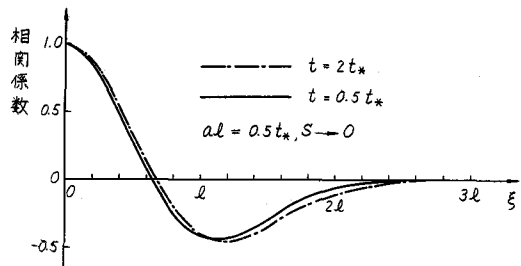


図-2 相関係数の時間変化

質のものと考えられる。

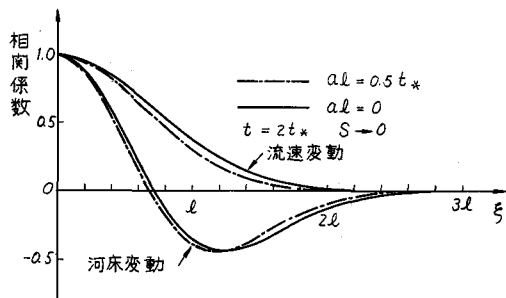


図-3 相関係数の比較

図-3および図-4は流速変動と河床変動それぞれの相関係数とスペクトル密度関数を比較したものである。

河床変動の平均規模は $al=0$ で約 $2.6l$ 、 $al=0.5t_*$ で約 $2.4l$ である。一方、2-9式で得られる流速変動の spatial integral scale A は $al=0$ で約 $0.9l$ 、 $al=0.5t_*$ で約 $0.8l$ である。これによれば流速変動の A と河床変動の空間規模はある程度の相関を持つて増減するのではないと思われる。しかし、この項での論議は概念的で実験による検証がなされていないのでこれからの課題としたい。

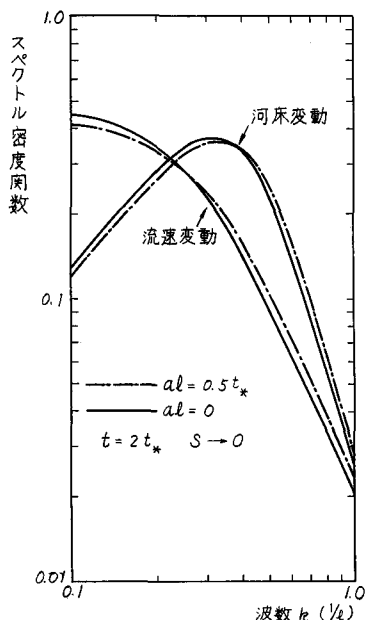


図-4 スペクトルの比較

3. 河床波の安定平衡機構

3-1 開水路の場合

図-5に示すように平均水面を x' 軸に、 x' 軸に鉛直上向に y' 軸を取り、流れに関する量に添字1、移動層に関する量に添字2をつける。また、以下では河床波、水面波ともに、波長に比べて振幅が十分に小さいものとして論議する。

進行速度が u_b である波状河床 $\eta'_2 = a \sin m(x' - u_b t)$ 上を流速 u_1 、水深 h_1 、水面形状が $\eta'_1 = b \sin m(x' - u_b t)$ で流れる流れの複素ポテンシャル $\omega'_1 = \phi'_1 + i\psi'_1$ (ϕ :速度ポテンシャル, ψ :流れ関数)を、境界条件

$$y'=0 \text{ で } -\frac{\partial \phi'_1}{\partial y'} = \frac{\partial \eta'_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta'_1}{\partial x'} \quad (3-1), \quad y'=-h_1 \text{ で } -\frac{\partial \phi_1}{\partial y'} = \frac{\partial \eta'_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta'_2}{\partial x'} \quad (3-2)$$

のもとに求めればつぎのようになる。^{1), 2)}

$$\omega'_1 = -u_1 z' - b(u_1 - u_b) \cos m(z' + iH_1 - u_b t) / \sinh mH_1 \quad (3-3)$$

ここに、 z' は複素変数で $z' = x' + iy'$ 、 m は波数で $m = 2\pi/L$ (L :波長, π :円周率), t :時間,

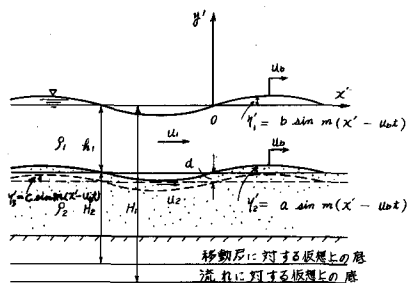


図-5 開水路移動床の流れ

H_1 は u_1 との関係が次式で表わされる仮想水深である。

$$u_1 = (g/m) \tanh mH_1, \quad (g: \text{重力の加速度}) \quad (3-4)$$

また, b は水面波の振幅で河床波の振幅 a とはつぎの関係がある。

$$b/a = \eta'_1/\eta'_2 = \sinh mH_1/\sinh m(H_1 - h_1) \quad (3-5)$$

一方, 河床表面の厚さ d の移動層の運動の複素ポテンシャル ω'_2 は境界条件

$$y' = -h_1 \text{ で } -\frac{\partial \phi'_2}{\partial y'} = \frac{\partial \eta'_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta'_2}{\partial x'} \quad (3-6), \quad y' = -h_1 - d \text{ で } -\frac{\partial \phi'_2}{\partial y'} = \frac{\partial \eta'_3}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta'_3}{\partial x'} \quad (3-7)$$

のもとに求めればつぎのようになる。

$$\omega'_2 = -u_2 z' - a(u_2 - u_b) \cos m(z' + iH_2 + ih_1 - u_b t)/\sinh mH_2 \quad (3-8)$$

ここに, H_2 は u_2 との関係が次式で与えられる仮想移動層厚である。

$$u_2 = (g/m) \tanh mH_2 \quad (3-9)$$

今, 上の座標系を x' の正の方向に u_b の速度で動く新座標系 $x - y$ で見れば河床波は静止して見え, さらに系全体に $u_b z$ のポテンシャルを加えると $x - y$ 座標系も静止する。この場合の運動は流れと移動層がそれぞれ $(u_1 - u_b)$, $(u_2 - u_b)$ の速度で移動し, 河床波と水面波は停止する。そして, この時の複素ポテンシャルは流れと移動層のそれぞれに対してつぎのようになる。

$$\omega_1 = -(u_1 - u_b)z - b(u_1 - u_b) \cos m(z + iH_1)/\sinh mH_1 \quad (3-10)$$

$$\omega_2 = -(u_2 - u_b)z - a(u_2 - u_b) \cos m(z + ih_1 + iH_2)/\sinh mH_2 \quad (3-11)$$

ω_1, ω_2 を用いて速度の x, y 成分の 2 乗和 q^2 は, $m^2 a^2, m^2 b^2$ は小として無視すれば

$$q_1^2 = (u_1 - u_b)^2 \{1 - 2m\eta_1 \cosh m(y + H_1)/\sinh mH_1\} \quad (3-12)$$

$$q_2^2 = (u_2 - u_b)^2 \{1 - 2m\eta'_2 \cosh m(y + h_1 + H_2)/\sinh mH_2\} \quad (3-13)$$

流れおよび移動層の運動に Bernoulli の圧力方程式

$$P + \frac{1}{2} \rho q^2 + \rho gy = \text{Const.} \quad (3-14)$$

を適用し, 境界面 $y = -h_1 + \eta_2$ における圧力が等しいとにおいて, 変数 η_2 の係数を 0 とすれば u_b に関するつぎの 2 次方程式が得られる。

$$m\{-\rho_1 \coth m(H_1 - h_1) + \rho_2 \coth mH_2\} u_b^2 + 2m\{\rho_1 u_1 \coth m(H_1 - h_1) - \rho_2 u_2 \coth mH_2\} u_b - \{\rho_1 u_1^2 m \coth m(H_1 - h_1) - \rho_2 u_2^2 m \coth mH_2 + (\rho_1 - \rho_2)g\} = 0 \quad (3-15)$$

ここに, P : 圧力, ρ : 密度である。

振幅が時間的に変化しない安定な河床波が存在するのは 3-15 式で与えられる u_b の実根が存在する範囲である。 u_b の根の判別式 D は, $\coth m(H_1 - h_1) = (1 - mh_1 F_1^2 \tanh mh_1)/(mh_1 F_1^2 - \tanh mh_1)$ であることを考慮し, $u_2 = \alpha u_1$ とおけばつぎのようになる。

$$D = \frac{-(\alpha^2 - 4\alpha + 2) \tanh mh_1 (mh_1)^2 F_1^4 + (\alpha - 2)^2 mh_1 F_1^2 - 2 \tanh mh_1}{mh_1 F_1^2 - \tanh mh_1} \quad (3-16)$$

ここに, D の符号に関係ない係数は省略し, F_1 はフルード数で $F_1^2 = u_1^2/g h_1$ である。

3-16 式の α, ρ_1, ρ_2 の決め方であるが, α は移動層とその F の静止層の限界があまり明確でなくかなり深くまで流動化していることを考え見かけより小さな値を, 流れを水とし $\rho = 1$, 河床砂の比重を 2.65, 空隙率を 0.4 とし $\rho_2 = 2$ とすればよいかと思われる。

一方、河床波の分類は Kennedy²⁾に従つて水面形状と河床形状とが逆位相 (3-5式が負) となるものを dune, 同位相 (3-5式が正) となるものを antidune, 安定な河床波が存在しないものを flat bed とする。

図-6 は $\alpha = 0.04$ とし、各種河床波の安定領域を求め波数と水深の積 mh_1 とフルード数 F_1 の平面に図示したものであり、図中の点線は u_b の2根のうちの小さい方をとつた河床波の等速度線である。これによれば、河床波の安定領域は明確に区分されている。

dune の領域では河床波は下流に進むのみであるが、antidune の領域では静止あるいは上流に進むものもある。これらは一般的に認められている2次元開水路の河床波の特性をよく表わしている。

図-7 は、

Kennedy²⁾によつて集録された実験結果に著者の実験結果を追加し、著者の理論領域と比較したものである。理論領域は実験結果とかなりよい一致を示していると思われる。

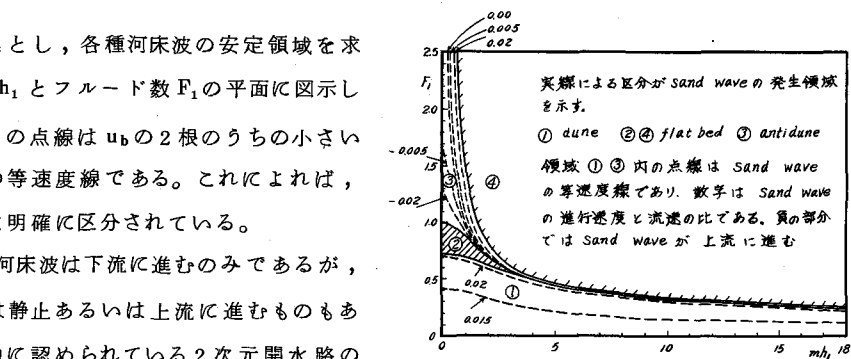


図-6 河床波の安定領域

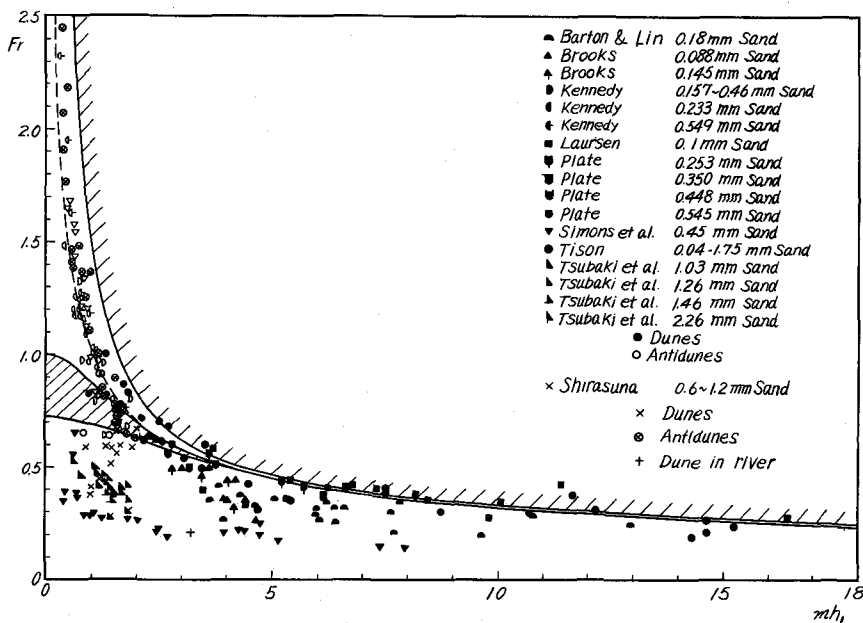


図-7 安定領域の実験値との比較 ($\alpha = 0.04$)

3-2 管路の場合

図-8 に示すように上下面とも固い水平な壁面で囲まれた管路移動床の場合について考える。流れと河床の境界面に x' 軸を、 x' 軸に鉛直上向に y' 軸をとる。(以下で用いる記号は開水路の場合と同じである。) 移動速度が u_b である波状河床 $\eta' = a \sin m(x' - u_b t)$ 上を流速 u_1 、深さ h_1 で流れる流れの複素ポテンシャル $\omega'_1 = \phi_1 + i\psi_1$ を境界条件

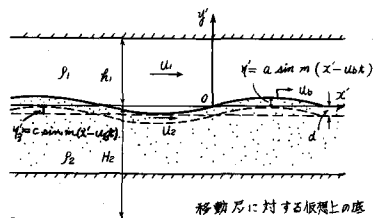


図-8 管路移動床の流れ

$$y' = h_1 \text{ で } \frac{\partial \phi_1'}{\partial y'} = 0 \quad (3-17), \quad y' = 0 \text{ で } -\frac{\partial \phi_1'}{\partial y'} = \frac{\partial \eta'}{\partial t} + u \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \quad (3-18)$$

のもとに求めればつぎのようになる。

$$\omega_1' = -u_1 z' + a(u_1 - u_b) \cos m(z' - i h_1 - u_b t) / \sinh m h_1 \quad (3-19)$$

一方、河床表面の移動層の運動の複素ポテンシャルは開水路の場合と同様につぎのようになる。

$$\omega_2' = -u_2 z' - a(u_2 - u_b) \cos m(z' + i H_2 - u_b t) / \sinh m H_2 \quad (3-20)$$

ここに H_2 は u_b との関係が次式で与えられる仮想移動層である。

$$u_b^2 = (g/m) \tanh m H_2 \quad (3-21)$$

開水路の場合と同様、 x' の正の方向に u_b の速度で動く新座標系 $x-y$ 上で定常化すれば

$$\omega_1 = -(u_1 - u_b) z + a(u_1 - u_b) \cos m(z - i h_1) / \sinh m h_1 \quad (3-22)$$

$$\omega_2 = -(u_2 - u_b) z - a(u_2 - u_b) \cos m(z + i H_2) / \sinh m H_2 \quad (3-23)$$

両式により速度成分の2乗和を求めBernoulliの圧力方程式を適用し、移動層と流れの境界面において圧力が等しいとおけば、 u_b に関するつぎの2次方程式が得られる。

$$(\rho_1 \coth m h_1 + \rho_2 \coth m H_2) u_b^2 - 2(\rho_1 u_1 \coth m h_1 + \rho_2 u_2 \coth m H_2) u_b + (\rho_1 u_1^2 \coth m h_1 + \rho_2 u_2^2 \coth m H_2) + (g/m)(\rho_1 - \rho_2) = 0 \quad (3-24)$$

開水路の場合と同様に $u_2 = \alpha u_1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ とし判別式 D を求めればつぎのようになる。

$$D = F_1^2 - 2 \tanh m h_1 / \{(\alpha - 2)^2 - 2\} m h_1 \quad (3-25)$$

図-9は $\alpha = 0.04$ についての河床波の安定領域を、図-10は $\alpha = 0.3$ について開水路、管路の河床波の特性を比較したものである。

$\alpha = 0.04$ と $\alpha = 0.3$ の場合を比較すると管路、開水路いずれの場合も α の大きい方が安定範囲が広い。 α の値が同一の場合、 $m h_1$ が大きい部分では安定領域は管路、開水路の場合ともに一致するが、 $m h_1$ が小さくなるにつれて開水路の場合の安定範囲が広がるが、管路の場合は閉じてしまう。また管路の場合には、安定領域の中に遷移領域としての不安定領域は無く、安定か不安定かは一本の線で明確に区分され、進行方向も下流方向のものしかない。このことから、管路の場合の安定な河床波は一種しか無く、その特性から開水路の場合の dune に相当するものと思われる。ここでの理論結果は実験によつて検証されておらず今後の課題としたい。

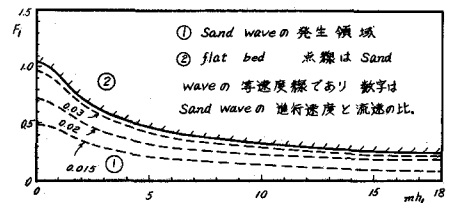


図-9 河床波の安定領域 ($\alpha = 0.04$)

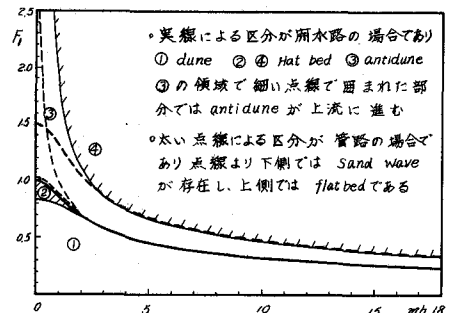


図-10 開水路、管路の比較 ($\alpha = 0.3$)

参考文献

- 1) Milne-Thomson, L.M.: Theoretical Hydrodynamics, 4th ed, Macmillan, London, '62
- 2) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, J. Fluid Mech,