粗面流の実験的研究　－相当砂粒粗度の次元解析的考察－

名古屋大学　正員　足　立　昭　平

流水の抵抗則は水工学の基礎的命題として、古くからの研究課題であり、現在は抵抗係数の形式も実用上ほぼ固まってきている。しかし、多種多様な粗面形態に対して抵抗係数を予測することは、なお難問である。ここでは、粗面形態と抵抗係数との関係を追究する前段階の考察として、一般粗面の粗度尺度と見なされている相当砂粒粗度の一般的形式を次元解析によって推論した。それらの推論を発展させるための速度分布実験について実験結果を提示できるまでに至っていないが、次元解析による無次元変数の設定の巧拙は考察の展開に重要な影響をもつものであり、種々御批判が得られれば幸いである。

2次元壁面乱流の対数速度分布式は、壁面の影響が支配的であると想定されるときの速度分布形式と、壁面から離れて乱流応力と速度勾配との間に独自の平衡関係が成立すると想定したときの速度分布形式、すなわち

$$\frac{u}{u_*}=f_1\left(\frac{u_* y}{\varepsilon_0}\right) \quad と \quad \frac{u}{u_*}=f_2\left(\frac{y}{h}\right) \qquad (1)$$

の両形式が両立するような領域の速度分布式として導かれ、

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{K}\ell n\frac{u_* y}{\varepsilon_0}+C_1 \quad あるいは \quad \frac{u_h-u}{u_*}=-\frac{1}{K}\ell n\frac{y}{h}+C_2 \qquad (2)$$

のように書きあらわされる。ここに、ε_0は壁面底層領域の混合係数、u_*は摩擦速度、u_hは壁面から距離hの自由流の速度、C_1およびC_2はこれらの速度分布が成立する領域の境界値で定まる積分定数である。

壁面条件は、$y=0$で、$u=0$および$\tau=\tau_0$であるが、壁面の粗度要素の後流は壁面上に、式(2)の領域と異なる底層領域を形成すると考えられるから、底層領域の上縁の高さをy_0、速度をu_0とおけば、式(2)の積分定数C_1は、

$$C_1=\frac{u_0}{u_*}-\frac{1}{K}\ell n\frac{u_* y_0}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

で与えられる。底層領域の微視的な内部構造を追究することは難しいが、その混合係数およびせん断応力を一定と見なせば、混合係数の定義　$\tau=\varepsilon\, du/dy$ から、

$$\frac{u_0}{u_*}=\frac{u_* y_0}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

とおくことができよう。また、壁面の個々の粗度要素がu_0およびそれぞれの特性長 $\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_i$ に対して固有な抵力係数 $c_0, c_1, \cdots c_i$ をもつとすれば、壁長 s に対する平均抵抗応力τ_0は

$$\tau_0=\frac{1}{s}\Sigma\, c_i \ell_i \frac{\rho u_0^2}{2} \qquad (5)$$

すなわち、

$$\frac{u_0}{u_*}=\sqrt{2s/\Sigma c_i \ell_i}=f_3\left(\frac{u_*\ell_0}{\nu},\frac{\ell_1}{\ell_0},\cdots\frac{\ell_i}{\ell_0},\frac{s}{\ell_0}\right) \qquad (6)$$

となる。底層領域の混合係数 ε_0 も壁面の粗度形態に特性づけられるが、粗度要素の後流の発達が粗度要素間隔に拘束されないような場合には、流れの場の拡がりとして相対水深 h/ℓ_0 もその因子につけ加えられるであろうから、

$$\frac{\varepsilon_0}{\nu}=f_4\left(\frac{u_0\ell_0}{\nu},\frac{\ell_1}{\ell_0},\cdots\frac{\ell_i}{\ell_0},\frac{h}{\ell_0}\right)=f_5\left(\frac{u_*\ell_0}{\nu},\frac{\ell_1}{\ell_0},\cdots\frac{\ell_i}{\ell_0},\frac{s}{\ell_0},\frac{h}{\ell_0}\right) \qquad (7)$$

が期待される。式(3)、(4)、(6)および(7)から、式(2)の対数速度分布式は

$$\frac{u}{u_*}=\frac{1}{K}\ln\frac{u_* y}{\nu}+f_3-\frac{1}{K}\ln(f_3 f_5) \qquad (8)$$

となり、これを速度分布の基本形と見なせば、平均流速Uに対する抵抗式は

$$\frac{U}{u_*}=\frac{1}{K}\ln\frac{u_* h}{\nu}+f_3-\frac{1}{K}\ln(f_3 f_5)-\frac{1}{K} \qquad (9)$$

で与えられる。相当砂粒粗度は、均一砂粒粗面の粗度特性長が砂粒々径だけであり、N:kuradse の実験によれば、$K=0.4$、$f_3-\frac{1}{K}\ln(f_3f_5)=8.5$ となることに着目して、式(9)に新らしい粗度尺度 k_s を導入して、それを

$$\frac{U}{u_*}=\frac{1}{K}\ln\frac{h}{k_s}+6.0 \qquad (10)$$

と書きあらわすものであるから、相当砂程粗度 k_s は

$$\frac{1}{K}\ln\frac{u_* k_s}{\nu}+f_3-\frac{1}{K}\ln(f_3 f_5)-\frac{1}{K}=6.0 \qquad (11)$$

したがって、一般形としては

$$\frac{k_s}{\ell_0}=f_6\left(\frac{u_*\ell_0}{\nu},\frac{\ell_1}{\ell_0},\cdots\frac{\ell_i}{\ell_0},\frac{s}{\ell_0},\frac{h}{\ell_0}\right) \quad \text{or} \quad \frac{k_s}{h}=f_7\left(\frac{u_* h}{\nu},\frac{\ell_1}{\ell_0},\cdots\frac{\ell_i}{\ell_0},\frac{s}{\ell_0},\frac{h}{\ell_0}\right) \qquad (12)$$

で定義されるものである。

桟粗度の特性長は、桟幅 t および桟間隔 s であるから、式(12)は

$$\frac{k_s}{k}=f_8\left(\frac{u_* k}{\nu},\frac{t}{k},\frac{s}{k},\frac{h}{k}\right) \qquad (13)$$

であり、これまでの実験によれば、$u_*k/\nu \approx 70\sim150$ の範囲で、$s/k \geqq 10$ の場合には、u_*k/ν および t/k は重要であり、桟粗度の相当砂粒粗度は相対桟間隔 s/k だけでなく、相対水深 h/k の関数となる。

移動床の場合は、粗度特性長として、河床砂粒径 d 、河床波の平均高Hおよび平均波長Lが挙げられ、さらに、一般にはKも変化すると考えられるから、式(12)は

$$\frac{k_s}{d}=f_9\left(K,\frac{u_* d}{\nu},\frac{H}{d},\frac{L}{d},\frac{h}{d}\right) \qquad (14)$$

となる。しかし、HおよびLは水理条件に支配され、それぞれ $(d, h, u_*, U, g, \gamma')$ の関係と考えられるから、

$$\frac{H}{d}=f_{10}(\tau_* F_r, \frac{h}{d}, \gamma') \quad \text{および} \quad \frac{L}{d}=f_{11}(\tau_*, F_r, \frac{h}{d}, \gamma') \qquad (15)$$

が期待される。ここに、γ'は砂礫の水中比重であり、

$$\tau_*=\frac{u_*^2}{\gamma' g d}, \quad F_r=\frac{U}{\sqrt{gh}}$$

である。したがって、式(14)は

$$\frac{k_s}{d}=f_{12}(K, \frac{u_* d}{\nu}, \tau_*, F_r \frac{h}{d}, \gamma') \qquad (16)$$

と書きあらわされる。しかし、この場合には $h/d=\gamma' \tau_* F_r^{-2}(U/u_*)^2$であり、$U/u_*$は式(11)の k_sの定義によって、h/dとk_s/dで与えられるものであり、式(16)において h/d は独立な無次元量ではない。また、一般にγ'は定値と見なしてよく、乱流が十分に発達すれば、$u_* d/\nu$も省略可能であろうから、Kをk_sの中に含めてk_sを定義できるものとすれば、

$$\frac{k_s}{d}=f_{13}(\tau_*, F_r) \qquad (17)$$

となる。実験によれば、$F_r>0.6$で式(17)の形式だけでは実測値を十分に説明できないといわれているが、粗度特性長がHおよびLで十分表現できる場合は式(17)が成立するように推察され、河床形態がk_s/dによって分類されると考えれば、(τ_*, F_r)は河床形態の分類示標としてもかなりの期待が持たれよう。