

1 まえがき

管路内跳水とは、開水路跳水に上壁面拘束が加わって跳水による乱流拡散が抑えられた場合に相当するが、その性状や内部機構については開水路の場合以上に不明な点が多い。管路途中に突起部やゲートを設置したいわゆる断面急変部の流れ（特にその背面の wake やはく離領域）に関する理論的解析はほとんど困難であり、従来主として空気流実験によってその内部機構に関して乱れのエネルギーの収支を中心に研究したものがあにすぎない。筆者らはすでに管路内跳水の一次元平均流としての性状に関する研究成果を発表しており¹⁾、ここでは管路内跳水の平均流プロファイルが自由噴流に類似したものであるとの予想のもとに、流速分布の self-preserving や最大速度のてい減特性を実験的に検証し、噴流理論の管路内跳水への適用性を考察するとともに、跳水現象で重要な役割を果たすローラーの特性を調べる目的でローラー上面の圧力変動解析を行ない、さらにその強さを示す指標を考えて、その相互の関係を見い出そうとしたものである。

2 管路内跳水の平均流プロファイルの基本式

ここで対象とする管路内跳水の平均流プロファイルは、すでに多くの理論的、実験的研究がなされている二次元自由噴流や wall jet と類似な性質があることが予想されるが、

- 1) 流下方向の圧力勾配 ($\partial p / \partial x$) は 0 でない。
- 2) 上、下面の壁による拘束を受け、自動噴流理論におけるような噴流外部からの流体の混入はなく、したがって逆流領域が存在する。

などの点が異なる。ここでは図-1 に示すように管路内跳水現象をモデル化し、主流方向 (x) には、

- 1) 最大速度のてい減がない。いわゆる Zone of flow establishment の領域 ($0 \leq x \leq x_0$)。
- 2) 最大速度のてい減が起こるが y 方向の拡散が卓越し、壁面の影響をそれほど受けない。いわゆる Zone of established flow の領域。

- 3) 壁面の影響を強く受け、 y 方向の拡散が抑制されつつ一様分布形へと遷移して行く領域。

また、 y 方向には、I) 下面から発達する境界層領域、II) 一様ポテンシャル領域、III) 混合領域、IV) 逆流領域 とに区分することができ、1)~3) と I)~IV) の組合せは、開度 $\lambda (=a/D)$ と初期フルード数 $F_1 (=u_1/\sqrt{ag})$ とによってきまる x_0 , L_1 (自由水面が管路上面と接する位置の x)、 L_2 (ローラーの長さでよみ点までの長さ x) の大小関係で3つの型に分類されるものとする。管路内跳水の性状を最も強く支配していると考えられる混合領域を明らかにし、先の噴流理論の適用性を検討することは重要である。

噴流の運動方程式は次式で与えられる。

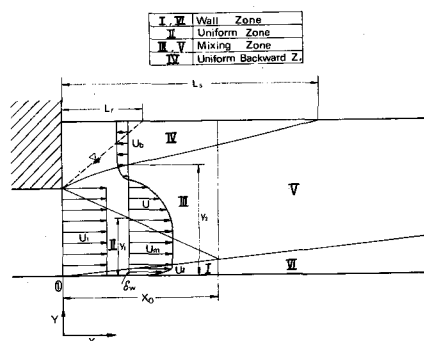


図-1 管路内跳水場のモデル化

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial (-\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (-\overline{u'v'})}{\partial y} \quad (1)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial (-\overline{v'^2})}{\partial y} \quad (2)$$

各断面での最大流速および逆流を u_m , u_b とし, 混合幅を b として, Prandtl の混合距離理論

$\tau = -\rho \overline{u'v'} = \rho \kappa (u_m + u_b) \partial \bar{u} / \partial y$ を用い, $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) \approx 0$ とし, また流速分布の self-preserving が成立すると仮定する。すなわち $\bar{u}/u_m = Q(\zeta)$ ($\zeta = y/b$) とする。

(1) $x \leq x_0$ のとき: $y = b/2$ に原点を移し, $b/x = \sigma$ (σ : 常数) と仮定して, $\bar{u}/u_m = Q(\zeta) = F'(\eta)$

($\eta = 2y/b$) とおくと, 式(1)および(2)から次式がえられる。

$$FF'' + 8\kappa \lambda' F'' = \frac{1}{\rho} \frac{x}{U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (3)$$

$$\lambda' = \frac{u_m + u_b}{u_m - u_b}, \quad U = \frac{u_m - u_b}{2}$$

境界条件は $F''(-1) = 0$, $F''(1) = 1 - \lambda'$, $F'(-1) = 1 + \lambda'$ である。

自由噴流理論では式(3)の右辺は 0 であるが, ピエゾ水頭の勾配 $\partial \bar{p} / \partial x \sim 1/x$ ならば, λ' の一次近似のみをとって, 同様な解析解がえられる。すなわち,

$$\bar{u}/u_m = \left(1 - \frac{\int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi}{\int_0^k e^{-\xi^2} d\xi} \right) \quad \xi = k\eta, \quad k = \frac{\sigma}{1.6\kappa}, \quad u_b/u_m < 1 \text{ としている。} \quad (4)$$

(2) $x > x_0$ のとき: 最大速度のてい減を $u_m/u_1 = (x/x_0)^{-n}$ ($n \geq 0$), 混合幅 b は境界層と上面の拘束を受けて変化するから, $b = b_0 (x + s/x_0 + s)^n$ と仮定する。

$\bar{u}/u_1 = \bar{u}/u_m F'(\eta)$ ($\eta = y/b$) とおくと, (1)の場合と同様にして次式の関係が導びかれる。

$$m(F')^2 + FF'' \left(n \frac{x}{x+s} - m \right) + \kappa \frac{x}{b} F''' = \frac{x_0}{\rho u_1^2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{2m+1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (5)$$

式(5)から流速分布の self-preserving の仮定は正しくないが, $n=1$, $x > s$, $\partial \bar{p} / \partial x \sim (x/x_0)^{-l}$ とおけば, $2m+1-l \sim 0$ の場合には, self-preserving が成立する。特に F_1 が十分大きければ, 式(5)の右辺は無視でき, $m=1/2$ とおけば, 式(5)の解析解が次式のように求まる。

$$\bar{u}/u_m = Q(\eta) = 1 - \left(\frac{1 - e^{-3\eta^2}}{1 + e^{-3\eta^2}} \right) \quad (6)$$

次に, 境界層領域の流速分布について Blasius の $1/7$ 則が成り立つものとする, 流れの運動量一次元解析により, $0 \leq x \leq x_0$ では

$$\left. \begin{aligned} b = \sigma x = y_2 - y_1 \quad \sigma &= \frac{2\kappa \int_0^1 (Q'(\zeta))^2 d\zeta}{\left[\int_0^1 Q^2(\zeta) d\zeta - \int_0^1 Q^2(\zeta) d\zeta \right]} \\ (1 - y_1/a) + 1/8 \left(\frac{\delta_w - \delta_o}{a} \right) - m_b \left(\frac{D - y_2}{a} \right) &= \frac{b}{a} \int_0^1 Q(\zeta) d\zeta \\ (1 - y_1/a) + 2/9 \left(\frac{\delta_w - \delta_o}{a} \right) + m_b^2 \left(\frac{D - y_2}{a} \right) &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{h - h_o}{a F_1^{1/2}} \right) + \frac{b}{a} \int_0^1 Q(\zeta) |Q(\zeta)| d\zeta \\ \frac{\delta_w - \delta_o}{a} &= 0.37 \left(\frac{u_1 a}{\nu} \right)^{-0.2} \left(\frac{x}{a} \right)^{0.8} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで δ_w は境界層厚, δ_0 は初期境界層厚であり, h はピエゾ水頭, $m_b = u_b/u_m \ll 1$ である。

$x_0 \leq x$ でも同様の式が得られ, x_1 および x_2 を L_r および L_s と一次関係式で結びつけ, それらと λ および F_1 との関係を知れば, (7)式から x_0 と m_b が計算できる。

3 実験および実験方法

2, の平均プロファイルの self-preserving の妥当性やローラーの特性を考察するために, 管路内で自由跳水ともぐり跳水(エアーポケット内の圧力 p が 0 の場合)が形成される場合について, 開度 λ と初期フルード数 F_1 とを変化させた実験を行なった。高さ 4 m の円形水槽

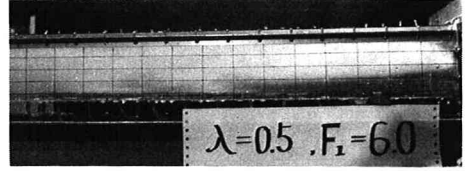


写真-1 流況例

から長さ 7.0 m, 8×18 cm 矩形断面管路に水を導き, その途中にベルマウス型ゲートを取りつけ, ゲート刃先から下流 1.0 m をテスト区間とした。流況の一例を写真-1 に示す。流速はビトー管を圧力変換器に導いて測定し, また跳水区間内の圧力変動は圧力変換器で測定し, A・D 変換器にかけた後統計処理を行なった。 $F_1 = 4.0$ で $\lambda = 0.2, 0.5, 0.7$ の場合の自由跳水, $F_1 = 8.0$ で $\lambda = 0.2$ の自由跳水ともぐり跳水の場合の流速分布を測定した結果を図-2 に示す。

総圧管および静圧管によって平均流速を求める場合の乱れの影響を検討した。すなわち, 総圧管の平均値 $\bar{p}_t$ は, $\bar{p}_t = \bar{p} + \frac{\rho}{2} \bar{q}^2 + \frac{\rho}{2} \bar{q}'^2$ ($\bar{q}^2 = \overline{u_i u_i}$, $\bar{q}'^2 = \overline{u'_i u'_i}$) で表わされる。

静圧管も圧力タップ周辺の形状を考えて, その平均値 $\bar{p}_s$ を $\bar{p}_s = \bar{p} + K \cdot \frac{\rho}{2} (\bar{v}^2 + \bar{w}^2)$ で表わすと, 流下方向流速 $\bar{u}$ は次式で与えられる。

$$\bar{u} \approx \sqrt{\bar{q}^2} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\bar{p}_t - \bar{p}_s) - \frac{1}{2} \{ \bar{w}^2 + (1-K)(\bar{v}^2 + \bar{w}^2) \}} \quad (8)$$

さらに流れが空気を混入しており, その濃度が c であれば, $\rho_w/\rho \div 1/(1-c)$ であるから,

$$\bar{c} \div \beta/(1+\beta) \quad (\beta = Q_a/Q_w \text{ は空気-水流量比}) \text{ とおけば,}$$

$$\bar{u} \approx \sqrt{2g\Delta H(1+\beta) - \frac{1}{2} \{ \bar{w}^2 + (K-1)(\bar{v}^2 + \bar{w}^2) \}} \quad (9)$$

となる。一般に, $\bar{w}^2/\bar{u}^2$ および β はいずれも 10^{-2} のオーダーであるから, $\bar{u} \approx \sqrt{2g\Delta H}$ として求めてもたかが数%の誤差であるが, ローラーの境界面あたりは乱れの効果が大い上に, 流向が傾斜しているから, その誤差も大きい。ローラーの境界面での乱れの効果を示すものとして, $\bar{p}_s$ の鉛直分布を示すと図-3 のようになる。すなわち, 式(2)より $\bar{p} = \rho g(h-y) - \rho \bar{v}^2$

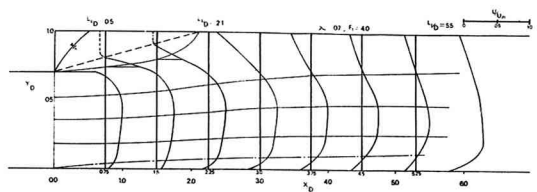
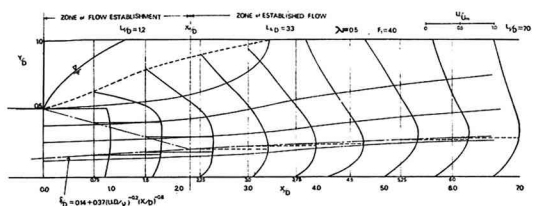
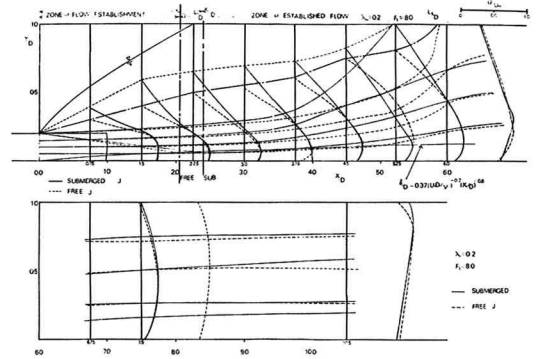


図-2 流速分布

$$\begin{aligned}\bar{p}_s &= \rho g(h-y) - \rho/2 \left((2-K) \bar{v}^2 - \bar{w}^2 \right) \\ &\approx \rho g(h-y) - \rho(1-K) \bar{v}^2\end{aligned}\quad (10)$$

Fage²⁾ による矩形断面ダクトでの値 $K=0.44$ を用いると、 $\bar{v}^2/u_*^2$ は 10^{-2} のオーダーとなるが、これだけ圧力は静水圧分布からずれることがわかる。

4 実験結果とその考察

1) 平均流速分布の self-preserving の妥当性について
混合領域内の平均流速分布 $\bar{u}/u_m = Q(\eta)$ を求めるには、まず2で述べた跳水部分の領域区分が必要である。

a) 最大流速のてい減特性について。 図-4に F_1 と λ を変化した場合の最大流速の流下方向の変化を示す。 F_1 が一定のとき、 x_0/a およびてい減勾配はともに λ が大きくなれば減少する。 $\lambda=0.5$ の場合、自由噴流における $m=0.5$ の値にきわめて近いが、 $\lambda=0.2$ では m は0.5より大きく、0.7では逆にそれより小さい。これは、明らかに開度が増大するとともに、上壁面による拡散抑制の効果があらわれるためである。

さらに、 λ が一定のとき、 F_1 が増大しても m の値に変化はないが、 x_0/a の値は増加する傾向がある。つまり同じ幾何形状では u_1 が大きいほど potential core の長さは大きくなるが、これは境界層厚は u_1 が大きいほど薄くなることからもうなずける。 λ および F_1 が同じ値のもとでの自由跳水ともぐり跳水とを比較した結果では、一般に後者の方が速度のてい減率が大きいことが認められた。

b) 境界層厚について。 管路底面に沿って発達する境界層の厚さ δ_w として、ここでは各断面での最大速度を示す点の y 座標をとって議論をすすめる。 $0 \leq y \leq \delta_w$ の速度分布について Blasius の $1/7$ 則を仮定し、式(7)を使って計算された結果と実験値とを比較して図-5に示す。 $\lambda=0.2$ および0.5の場合には計算値と実測値は一応満足すべき一致を示している。ただし、初期境界層厚さ δ_0 と管高 D との比はそれぞれ0および1.4である。

c) 混合幅 b について。 $y=y_1$ の決定は正確さを欠くが、ここでは $m_b = u_b/u_m$ が十分小さいと考えて、 $\bar{u}=0$ となる y 座標を混合領域の上縁と決めた。 b と x とは直線関係にあるとみなせるが、 x_0 を境としてその勾配 $b/x=\sigma$ の値は小さくなり、フルード数にはほぼ無関係で、開度 λ に大きく支配される傾向がある。したがって、 b は L_r, L_s と同様に主に跳水の幾何形状によってきまる要素と考

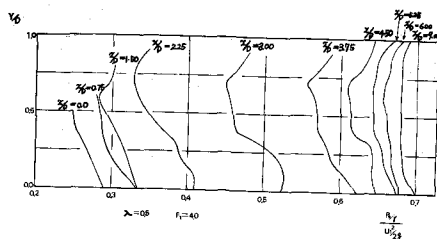


図-3 静水圧分布

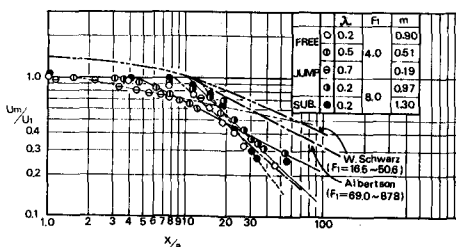


図-4 最大速度のてい減特性

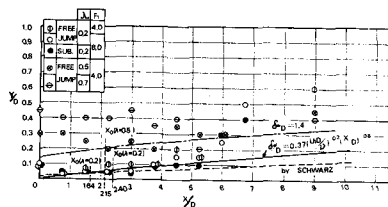


図-5 境界層の厚さ

えてよい。ただ、跳水始端から最大圧力を示す点までの距離として定義される跳水長さ λ は、開水路の場合と同様 F_1 および λ の関数となる。 $\lambda=0.2$, $F_1=8.0$ の自由跳水ともぐり跳水の場合を比較した結果、後者の方が $x < x_0$ で σ が大きく、 $x \geq x_0$ では両者はほぼ同じ値になることが認められた。特に、開度が小さい場合のもぐり跳水は、はく離領域が自由跳水に比べてはるかに大きいために、 $x_0 > x$ での混合効果が大きく、より早く一様化して行くものと考えられる。

d) 平均流の self-preserving の妥当性 図6-(a) および(b)は a)~c) の考察結果から得られた Zone of flow establishment および Zone of established flowでの速度分布を無次元表示したものである。まず、 $x < x_0$ の領域では、 F_1, λ にほぼ無関係に self-preserving が成立することがわかる。また、これらの流速分布の表示式として先に筆者¹⁾らが与えた $Q(\eta) = (1-\eta^2)^{3/2}$ を適用することはかなり妥当である。一方、式(4)の分布形は、 y 方向のてい減が強すぎ、満足すべき表示を与えるものとはいえないようである。 $x \leq x_0$ の区間での $\partial \bar{p} / \partial x$ の変化率が開度によって異なることから、このような結果が示されたものであり、自由噴流の場合と比較してその内部構造は複雑であることが認められる。

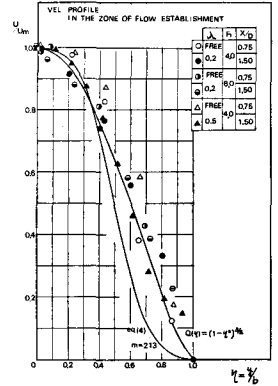


図6-a 流速分布

次に $x_0 < x < L_s$ の範囲においても近似的に流れの self-preserving が成立することが認められ、この場合にも上述の分布式は上壁面の拘束を受けない x/D の範囲でかなりよい近似を与えるものとみなしてよい。

self-preserving に対する λ および F_1 の影響は、一般に F_1 が大きいほど x/D の大きい範囲まで self-preserving が成立し、一方 F_1 が一定であれば、 λ の値による流速分布の差はほとんど認められない。この理由として F_1 が大きい場合には、 m は変化しないが、 ℓ が増大し、しかも $x_0/\rho u_1^2$ が小さくなるから、式(5)の右辺が近似的に無視できるようになり、式(5)で与えられる self-preserving が成立しやすくなるためと考えられる。 $x > x_r$ になると混合幅は上壁面の拘束を強く受けるようになって、もはや self-preserving の性質を失ない、次第に一樣管路の流速分布に漸近するようになる。

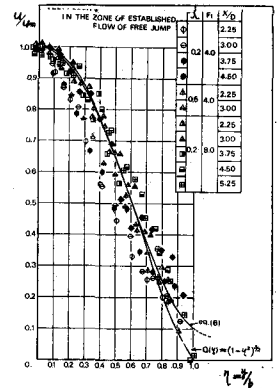


図6-b 流速分布

2) はく離領域の規模に関する考察

跳水現象におけるローラーの規模を決定することの必要性は、乱れの生成および減衰に及ぼすローラーの役割が大きいことから考えても明らかである。まずローラーの幾何形状に関しては、流速分布から求めた初期断面からローラー終端までの距離と染料によって観測した L_s とはかなり良い一致が見られた。明らかに λ が小さいほど、ローラーの長さは大きく、 F_1 よりは λ の影響が支配的である。いま、ローラーが跳水場に占める役割の大きさを評価するために次のような指標を考える。ローラーと主流との境界面に働くせん断応力 τ_i はその境界面と x 軸とのなす角 θ が微小であり、 $\bar{u}^2 \approx \bar{v}^2$ と仮定すれば、 $\tau_i / \rho u_1^2 = \bar{u} \bar{v}' / u_1^2$ 式(1)を0から y_r (ローラー境界面)まで積分すると

$$\tau_i / \rho u_1^2 = \frac{d}{dx} M(x), \quad M(x) = \int_0^{y_r} \left\{ (\bar{u} / u_1)^2 + p / \rho u_1^2 + \bar{u}^2 / u_1^2 \right\} dy \quad (11)$$

$M(x)$ は比力であり、 $\bar{u}^2/\bar{u}^2$ は 10^{-2} オーダであるから無視しうるとすると、平均量から求められる。図-7は $\lambda=0.2, 0.5$ の各場合について式(11)から求めた結果であり、H. Rouse³⁾らが空気流による跳水について実測した τ_r の分布を比較のため併示している。 τ_r に関する定量的評価は、実際に管路跳水に関する乱れの測定結果にもとづかねばならないが、この図からローラーの境界面に働くせん断応力はローラーの中央付近でピークに達し、また開水路跳水場の強さと同程度であることがわかる。また τ_r の大きさは幾何形状よりも流れの水量に依存する傾向がある。次にローラーの強さを示す指標として、

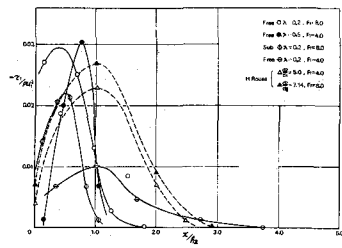


図-7 せん断応力分布

$$R_s = \frac{\text{ローラー境界面にそってなされる仕事量}}{\text{全エネルギー損失}} = \frac{F_1 \int_0^{L_j} (\tau_r / \rho u_1^2) (\bar{u}_r / u_1) d(x/D)}{(H_s/D)} \quad (12)$$

を定義する。 λ が一定のとき F_1 が大きいほどローラーによる主流のエネルギー損失は大きいことが式(12)の計算結果から確かめられた。 F_1 が一定のときは λ が小さいほど R_s は大きい傾向にあるが、いずれの場合にも全エネルギー損失の約半分はローラーによって乱れエネルギーに変換されるものと考えてよい。

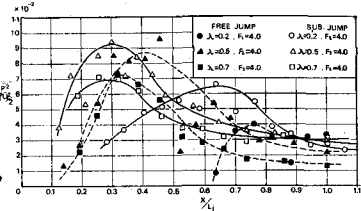


図-8 圧力変動分布

3) ローラー上面の圧力変動特性
図-8は管路上壁に沿っての圧力変動強度 $\sqrt{p'}/\rho u_1^2$ と x/L_j との関係を示したものである。 F および λ のいかなる値に対しても $\sqrt{p'}$ はローラー終端直上流でピーク値を示す。また、その値は、 F_1 より λ の影響をより強く受ける。一定の F_1 の値に対しては、 $\lambda=0.5$ の場合に圧力変動強度が最大値を示したが、 $\lambda<0.5$ ではローラーによって生成された乱れがその終端より上流で減衰しはじめ、一方 $\lambda>0.5$ では壁面による拘束によって小さくなるためと考えられる。自由跳水ともぐり跳水の場合の圧力変動強度を考察した結果、 λ が0.2のとき、もぐり跳水の方が自由跳水に比べ減衰率は大きい、 λ が大きくなるとともに両者の関係は接近し、 λ が0.7の場合には逆に自由跳水の方が早く減衰する結果が得られた。図-9は $\sqrt{p'}$ の最大の点でのパワースペクトルを示したものであり、 λ および F_1 に対する変化特性は明確でないが、明らかに $8H_s$ 以下の低周波数の変動が主であり、それより高い周波数成分は急激に減少する。圧力変動を直ちにローラーの回転振動数に関係づけることは疑問であるが、少なくとも低周波の大きなスケールの乱れがローラー中に含まれ、したがってローラーは乱れの発生に主に貢献していることが予想される。

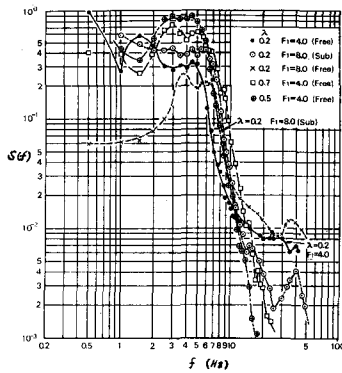


図-9 圧力変動パワー
スペクトル分布

5. あとがき
本研究によって管路内跳水における流れの内部機構と減勢作用で果たすローラーの役割とを平均水量および開度との関連によってある程度定量的に評価することができた。

参考文献

- 1) 中川, 祯津 ; 管路内跳水に関する基礎的研究 ; 第26回土木学会年講 1971.
- 2) J. W. Daily 他 ; Turbulence and Static Pressure in Relation to Inception of Cavitation ; I. A. H. R . 1961
- 3) H. Rouse 他 ; Turbulence Characteristics of Hydraulic Jump ; A.S.C.E. 1958. HY2