

1. 概説

局所的な流れにおいては、底面ないしは側面でのせん断力により規定される接近流の流速分布と障害物によって形成される境界形状との相互作用により渦を含む複雑な流況が認められる。これらの現象を解析する上で渦度の概念を用いると現象を単純化して解釈しうるようである。その方法の一つはいわゆる二次流の概念によるもので、主流としてのポテンシャル流に二次流の原因である渦糸が運ばれるとしたもの¹⁾であり、もう一つはHelmholtzの渦度保存則によるもの²⁾である。もちろん、渦度の概念を用いず運動方程式と連続の式とを直接的に解く方法も試みられている。いずれの方法によっても、局所流の三次元的な解析はほとんどなされておらず、二次元場の解析かもしくは現象を代表する一つの断面内における流れの二次元的な解析にとどまっているようである。

ここでは、開水路断面急変部における流れの例として橋脚周辺の流れと急縮部周辺の流れをとりあげる。橋脚周辺の流れについては、水路の中央断面における流れの現象把握が全体の現象を知る上で重要な手がかりになるという観点からその断面内における実験的あるいは解析的研究がなされており^{3) 4)}、ここでもその手法を用いている。また急縮部周辺の流れについては、水路底面に平行な断面内の流れについて検討を加える。

2. 橋脚周辺の流れに関する実験的研究

(1) 実験装置と実験条件 実験に用いた水路は透明アクリル樹脂製で、幅20cm、長さ6m、こう配1/500である。水路の中央に一つの橋脚を設置し、水の電気分解により発生する水素の気泡をトレーサーに用いて、Flow visualization法により流れのパターンを観測した。流体としては水とグリセリンの混合液を用いて粘性を上げ、層流状態で実験を行なった。橋脚としては、直径が5.0, 4.025, 3.525, 2.20, 1.80 cmの円柱および1辺5.0 cmの正方角柱を用い、それを水路の中央に一本設置した。境界条件を与える接近流速分布は図1に示すrun A~Dの4種であり、各場合における平均流速と水深を用いたRe数はrun Aで10.0, run Bで6.54, run Cで3.60, run Dで1.84である。

(2) 中央断面内の流れパターン 一辺5 cmの正方角柱をrun Aの接近流速の中に設置し、角柱前面より上流7.5 cmの点から水素気泡を0.2秒間隔のパルス状に投入した場合の流下位置を示したものが図2である。この図から、中央断面で渦を構成する流線は上流側で $z = 1.0 \sim 3.5$ cmに位置するものであり、上流側で $z = 0 \sim 1.0$ cmの流線は渦による逆流におされて渦の外側を横(y)方向に流れ去ることが認められた。図3は上図から算出した流速の絶対値 q を接近流速の平均値で割って無次元化したものの分布を示している。この図から、渦軸に近いほど流速が0に近づいていることが明らかであり、渦軸の近傍では自由渦の仮定からはずれていることがわかる。

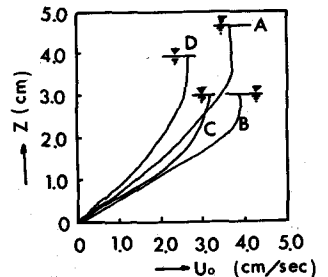


Fig.1 Distribution of approaching velocity.

(3) 中央断面内の渦度分布 図2および図3から中央断面内におけるy方向の渦度成分 η の分布

を計算し図示したものが図4である。ただし、計算に際して流線の曲率半径を R とするとき $\eta = q/R + \partial q/\partial R$ なる式を用いたので、その値はかならずしも正確とはいえないが、傾向として渦軸に近づくにつれて η も増大している様子がわかる。つぎに、現象の三次元的な拡がり調べるため、本実験においては上流側の主流の流速分布が $x = -7.5\text{cm}$ の所のそれで代表されると考えて、そこで中央断面内に単位面積を占める流体実質部分が流下するにつれて中央断面内にしめる面積を a とするときの $a\eta$ を図示したものが図5である。この図で $a\eta$ の等高線が図2に示した流線にほぼ平行していることから、近似的に Helmholtz の渦度保存則が成立しているといえよう。また以上の実験結果とその考察から、橋脚前面の渦を構成する流体はつねに上流側の主流から供給されていることが明らかであり、渦領域を閉領域とした Allen のモデルは適当でないことがわかる。また主流の中に既に存在して

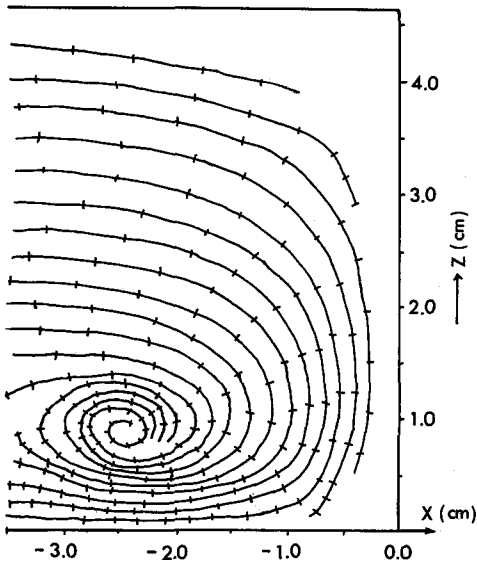


Fig.2 Pattern of stream lines.

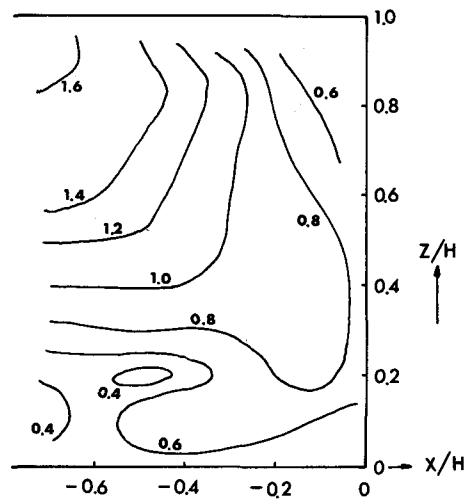


Fig.3 Distribution of $\sqrt{u^2 + w^2}$

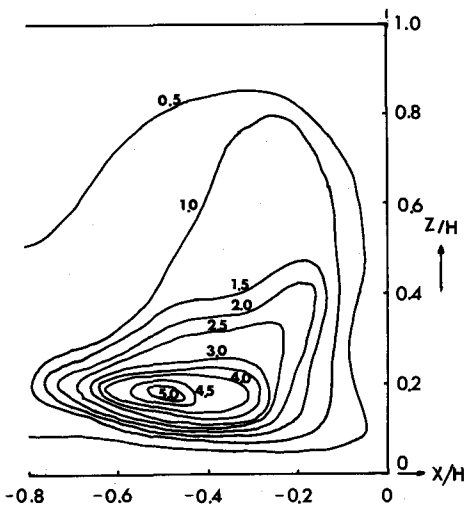


Fig.4 Distribution of vorticity.

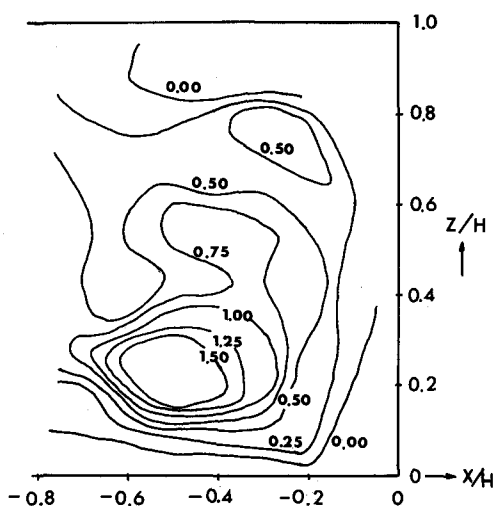


Fig.5 Distribution of $a\eta$

いた渦度が橋脚によって集中させられることにより渦が生じるという Roper⁵⁾らの考え方の正当性が認められる。

(4) 渦軸の位置 円柱橋脚の場合、渦軸の中央断面内における位置の実測値 (X_0 , Z_0) を水深の実測値 H でわって無次元化した値を、橋脚の半径 a_0 を同じく H でわって無次元化したものと関係づけたものが図 6 である。この図から、

$$\left. \begin{aligned} X_0/H &= 0.57 (a_0/H)^{0.6} \\ Z_0/H &= 0.21 (a_0/H) \quad \text{または} \quad Z_0 = 0.21 a_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

なる近似式を導いた。すなわち、渦軸の位置は a_0/H の関数として与えられ、とくに Z_0 は橋脚の半径によってほぼ決まる様である。

3. 開水路急縮部の流れに関する実験的研究

(1) 急縮部前面の隅角部における渦の構造 先の実験と同じ水路に幅 4 cm の突出部を両側面に設けた場合、上流側隅角部に渦の発達が認められた。流量 0.430 ℓ/sec, 水深 4.4 cm, 動粘性係数 $\nu = 2.5 \text{ (cm}^2\text{/sec)}$, 水深と平均流速を用いた Re 数 8.6 の場合、隅角部の軸は図 7 のように観測された。すなわち、 Fig.6 Position of vortex axes.

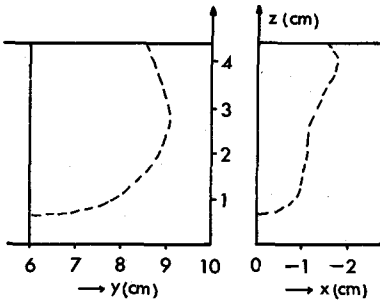
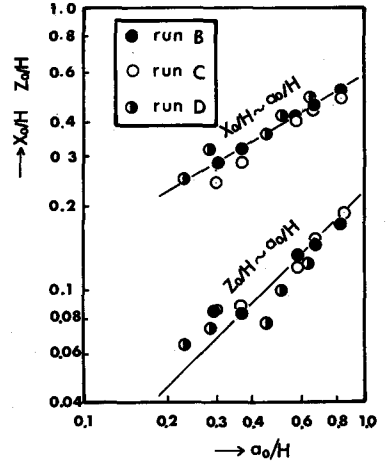


Fig.7 Axis of corner vortex.

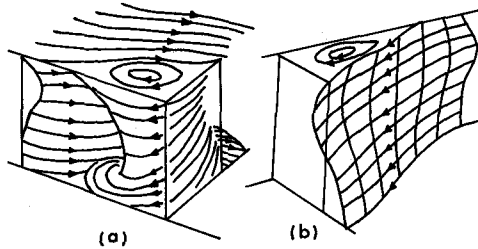


Fig.8 Three dimensional flow pattern.

渦軸は水面近くでは水面にほぼ直角であるが、水路底に近づくにつれて水平方向となり、そのために急縮の上流部で水面近くかつ側壁の近くを流下する流体はこの渦により急縮部隅角部の所で水路底の方へおしやられ、水路底面のごく近傍ではそれによる逆流が顕著になることが認められる。以上に述べた点を概念的に図示すると図 8 のようになる。

(2) 水平断面内における連続条件の検討 上に述べた渦の三次元的な機構を数値的に明らかにするために、急縮部とそれより 45 cm 上流側とにおいて、底面から同じ高さにおける単位高さあたりの流量を比較してみる。流速の実測値は図 9 であり、それを表にしたものが表 1 である。本表において $z = 0.3 \sim 2.0 \text{ cm}$ では $x = 0$ 断面の方が流量が大きく、 $x = -45 \text{ cm}$ 断面における流量を流す $x = 0 \text{ cm}$ 断面における幅を D の欄に書いてある。また $z = 3.0 \sim 4.0 \text{ cm}$ については $x = -45 \text{ cm}$ 断面の流量の方が大きいので、 $x = 0 \text{ cm}$ 断面の流量を流す $x = -45 \text{ cm}$ 断面における幅を E の欄に書いてある。これ

Table 1.

Z (cm)	Unit depth discharge (cm/sec)		A-B (cm/sec)	Central breadth of equal discharge	
	section X=0 (cm)	section X=-45 (cm)		section X=0 (cm)	section X=-45 (cm)
	A	B		D	E
0.3	38.80	26.61	12.19	9.00	
0.5	61.53	33.51	28.02	7.32	
1.0	81.70	66.74	14.96	9.00	
1.5	94.28	-	-	-	
2.0	109.75	101.52	8.23	10.06	
3.0	118.61	132.14	-13.53	-	15.96
4.0	126.70	140.04	-13.34	-	15.26
4.3	137.08	-	-	-	

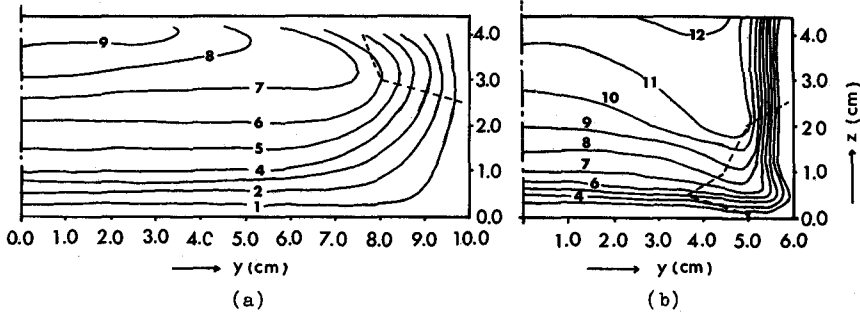


Fig.9 Velocity distribution at section (a); X=-45cm and (b); X=0cm.

4. 橋脚周辺の流れパターンの解析

(1) ポテンシャル流としての解析 橋脚前面の水路中央断面における渦度の分布は先にも示したように渦軸に近づくにつれて増大する状態で分布することが認められるが、ここでは簡単のために渦度がすべて渦軸の位置に集中しその他の位置では0であると、さらに二次元発散の値も同様の分布をすると仮定した。すなわち、渦軸の位置 (X_0 , Z_0) に強さ m の吸込み点と強さ k の渦糸が存在すると仮定した。その場合、橋脚の存在による流れの三次元的な現象の影響は渦糸の強さ k に帰着させられると考えられ、二次元ポテンシャル概念による解析が可能となる。

水深の値を $\alpha\pi$ とするとき、流れ関数 ψ ならびに速度ポテンシャル ϕ は次のように求められる。

$$\frac{\phi}{m} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{B}{A} + \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{4\pi} \log (C^2 + D^2) \quad (2)$$

$$\frac{\phi}{m} = \frac{1}{4\pi} \log (A^2 + B^2) - \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{D}{C} \quad (3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= \beta^2 \left\{ \cosh \frac{X}{\alpha} \cos \frac{Z}{\alpha} - \cosh \frac{X_0}{\alpha} \cos \frac{Z_0}{\alpha} \right\}^2 - \sinh^2 \frac{X}{\alpha} \sin^2 \frac{Z}{\alpha} + \sinh^2 \frac{X_0}{\alpha} \sin^2 \frac{Z_0}{\alpha} \\ B &= 2\beta^2 \left(\cosh \frac{X}{\alpha} \cos \frac{Z}{\alpha} - \cosh \frac{X_0}{\alpha} \cos \frac{Z_0}{\alpha} \right) \sinh \frac{X}{\alpha} \sin \frac{Z}{\alpha} \\ C &= \left\{ \left(\cosh \frac{X}{\alpha} \cos \frac{Z}{\alpha} - \cosh \frac{X_0}{\alpha} \cos \frac{Z_0}{\alpha} \right)^2 + \sinh^2 \frac{X}{\alpha} \sin^2 \frac{Z}{\alpha} - \sinh^2 \frac{X_0}{\alpha} \sin^2 \frac{Z_0}{\alpha} \right\} / E \\ D &= -2 \left(\cosh \frac{X}{\alpha} \cos \frac{Z}{\alpha} - \cosh \frac{X_0}{\alpha} \cos \frac{Z_0}{\alpha} \right) \sinh \frac{X_0}{\alpha} \sin \frac{Z_0}{\alpha} / E \\ E &= \left(\cosh \frac{X}{\alpha} \cos \frac{Z}{\alpha} - \cosh \frac{X_0}{\alpha} \cos \frac{Z_0}{\alpha} \right)^2 + \left(\sinh \frac{X}{\alpha} \sin \frac{Z}{\alpha} + \sinh \frac{X_0}{\alpha} \sin \frac{Z_0}{\alpha} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

らの幅を図9に記入し、破線で囲んであるが、図9(a)の破線で囲まれた流体部分が流下して(b)の部分にほぼ移行するものと考えられる。

$$\alpha = H/\pi$$

である。

(2) 渦度保存則による解析 前節と同様に中央断面内で解析を進めるが、ここでは渦度は流線に沿って保存されるとし、かつ渦軸の位置に強さ k の渦糸が存在すると仮定する。また発散の値は前と同様に渦軸の位置に集約されるとする。その場合、渦軸の位置以外の点で、 $u = \partial\phi/\partial z$, $w = -\partial\phi/\partial x$ が成立つから、渦度が流線上で保存されるとすれば、

$$\nabla^2\phi = -\eta(x, z) = f(\phi) \quad (5)$$

が成立つ。境界条件として、 $x = -\infty$ の断面で $u = U/U_{max} = \alpha \sin(\pi/2)z$ であるとする、Yih の解析と同様にして上式は結局次のようになる。

$$\nabla^2\phi = -(\pi^2/4) + \pi\alpha/2 \quad (6)$$

この式は線型であることに注目し、その解を $\phi = \phi_1 + \phi_2$ とおき、 ϕ_1 については $\nabla^2\phi_1 = 0$ が満足されているとし、その境界条件は、① $x = -\infty$ の断面で $u = m$ (一定)、② 渦軸の位置での吸込の強さ $= m$ であるとする。そうすると、 ϕ_2 に関する基礎方程式は、

$$\nabla^2\phi_2 = -(\pi^2/4)(\phi_1 + \phi_2) + \pi\alpha/2 \quad (7)$$

となり、境界条件は、 $x = -\infty$ の断面で $u = \alpha \sin(\pi z/2) - m$ となる。 ϕ_1 の解は先に(2)式で求めたものであり、これを(7)式に代入して ϕ_2 の基礎式が得られるが、その式は解くのが困難であるため、ここでは(7)式を近のように近似化することにした。

$$\nabla^2\phi_2 = -(\pi^2/4)(\phi_2 + mz) + \pi\alpha/2 \quad (8)$$

その場合、境界条件は、① $z = 0$ かつ $-\infty < x \leq 0$ で $\phi_2 = 0$ 、② $z = 1$ かつ $-\infty < x \leq 0$ で $\phi_2 = 0$ 、および ③ $0 \leq z \leq 1$ かつ $x = 0$ で $\phi_2 = 0$ である。これに対する解は次の様に求められる。

$$\phi_2 = -mz + \frac{2}{\pi}\alpha \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} \left(\frac{2\alpha}{\pi} - m\right) \cos n\pi - \frac{\alpha}{n\pi^2 \left(\frac{1}{4} - n^2\right)} \right\} \sin n\pi z \cdot \exp\left\{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} \pi x\right\} \quad (9)$$

(3) 実験値と解析値との比較 図2～図4に示した実験結果に対して、流線のパターンを(2)式ならびに(9)式で計算し、その結果をそれぞれ図10と図11に、また絶対流速の分布を図12に示す。

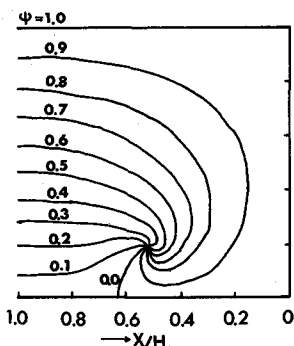


Fig.10 Pattern of streamlines, by eq.(2).

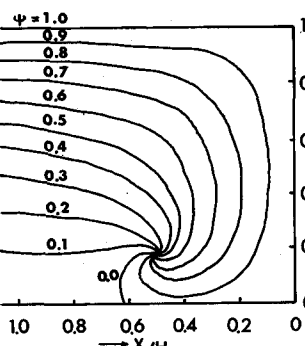


Fig.11 Pattern of streamlines, by eq.(9).

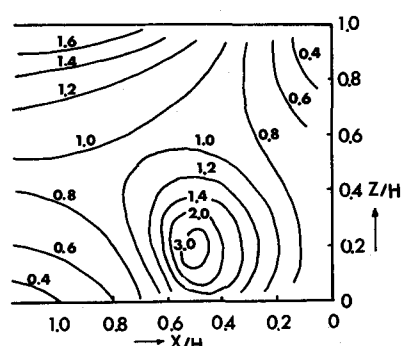


Fig.12 Distribution of $\sqrt{u^2 + w^2}$ calculated from eq.(9).

ただし、渦軸の位置は実測されたものを用い、 $k = m = 1$ として計算している。解析値と実験値とを比較した場合、流線のパターン、絶対流速分布とも(9)式を用いた場合近似の度合はよいといえる。ただ、渦軸の近傍では解析値の方は流速が増大しており、実際現象と異なったものになっている。

5. 急縮部前面の流れパターンの解析

先に実験的に明らかにした所にもとづき、突出壁面に沿って一様な強度をもつ線状の吸込みあるいは吹出しがあると仮定し、水路底面に平行な断面内の流況を二次元的に取扱おうことを試みる。渦度が流線に沿って保存されるとすると、

$$\nabla^2 \phi = f(\phi) \quad (10)$$

が成立つ。これに対して、境界条件として、上流側の接近流速分布が $u = U/U_{\max} = \cos(\pi y/2)$ で与えられ、下流側流出部の流速分布は一様であるとした。この場合、 $x = -\infty$ で $\phi = (2/\pi) \sin(\pi y/2)$ となるから、(10) 式は

$$\nabla^2 \phi = -\pi^2 \phi / 4 \quad (11)$$

となる。境界条件を書きなおすと、① $y=0$ で $\phi=0$ ，② $x=-\infty$ で $\phi=(2/\pi) \sin(\pi y/2)$ ，③ $x=0$ かつ $0 \leq y \leq y_0$ で $\phi=2ay/\pi y_0$ ，④ $y=1$ で $\phi=2/\pi$ ，⑤ $x=0$ かつ $y_0 \leq y \leq 1$ で $\phi=2/\pi + 2(a-1)(1-y)/\pi(1-y_0)$ となる。ここで y_0 は下流側の開口幅の半分であり、 $2(a-1)/\pi$ が全吹出し量である。したがって $a > 1$ のとき吹出し、 $a < 1$ のときは吸込みを意味する。以上の境界条件の下で (11) 式を解くとつぎの解をうる。

$$\phi = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi y \cdot \exp\left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} \pi x\right) \quad c_n = \frac{4}{n\pi^2} \left(\frac{a - y_0}{y_0(1 - y_0)} \frac{\sin n\pi y_0}{n\pi} - \frac{\cos n\pi}{1 - 4n^2} \right) \quad (12)$$

この解の数値計算結果ならびにその実験結果との比較については講演時に述べる。

6. 結語

局所流の三次元的な現象を渦の挙動に注目して把握することを試みた。橋脚周辺の流れについては Helmholtz の渦度保存則が近似的に成立つことが実験的に認められた。流線に沿って渦度が保存されるとして中央断面内で流線パターンと流速分布を解析的に求めたところ、実験値とよく一致することが認められた。急縮部の流れについては、隅角部に発生する渦によって側面に近い水面近傍の流体部分が水路底の方へおしやられる状態を実験的に明らかにし、この事実にもとづいて、水路底面に平行な断面内で突出壁面に沿う吹出しまたは吸込を仮定し、渦度保存則に基づく解析を行なった。いずれの解析においても、式中の諸定数——渦度の強さ k ，吹出しの強さ a ，渦軸の位置 (X_0, Z_0) など——を解析的に求める方法を今後確立する必要がある。

参 考 文 献

- 1) たとえば、Lamb, H.: "Hydrodynamics", Cambridge University Press, 1963.
- 2) たとえば、Yih, C.S.: Two Solutions for Inviscid Rotational Flow with Corner Eddies, Journal of Fluid Mechanics, vol. 5, 1959, pp. 36-40.
- 3) Roper, A.T., Schneider, V.R. and Shen, H.W.: Analytical Approach to Local Scour, 12th Proc IAHR, vol. 3. Colorado, USA, 1967, pp. 151-161.
- 4) 吉川秀夫, 福岡捷二, 岩間汎, 小曾川久貴: 橋脚の洗掘ならびにその防止に関する考察, 土木学会論文報告集, 第194号, 1971, pp. 83-90.
- 5) Allen, J.R.L.: "Current ripples." North-Holland, 1968.