

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗

京都大学大学院 学生員 ○野口 正人

1. まえがき

発電所の冷却水，かんがい用水などにみられるように，水の特定の用途に対する選択的利用の多様性が最近とみに大きくなってきた。このような問題の水理学的なあらわれの一つに密度変化をもった流れよりの分離取水があり，今までにも数多くの研究がなされている。しかし，それらのほとんどが理想的モデルを取り扱っているために，それをそのまま実際問題に適用するわけにはいかない。たとえば，河床におかれた構造物や取水路の形態等によって，しばしば分離取水の効率が悪くなったりするもの，その一つのあらわれである。このような取水に限らず，密度成層流の挙動をよく知るという面からも，密度変化のある流れの構造物周辺における挙動をより詳細に取り上げる必要がある。従来より，単層流については，橋脚付近や堰上の流れ，また，急拡，急縮等の問題と関連して意欲的に取り組まれているのに対し，成層流についてはこのような研究はほとんど見当たらない。筆者らの知るところでは，一方向流れの河床におかれた障害物および水路幅の変化に伴って生ずる変化を調べたものや，²⁾³⁾ 取水口の取付け位置の流れに及ぼす影響を調べた論文が数篇あるだけのようである。もちろん，このような研究が見当たらない理由には，成層流の水理が単層のもの延長線上にあり，類似の現象として現われることが予想されるからだと思われる。しかし，他方，成層流の問題が取り上げられ出してから歴史の浅さにもよるのであろう。

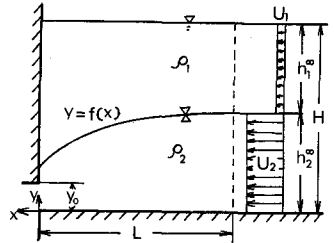


図 1

ここでは密度成層流として二成層流を取り上げ，一方の流体を分離取水する場合に，取水路の形が流れに及ぼす影響をおよぼすかについて考察を行なった。

2. 内部境界面形状の決定

図 1 に示すように，上層および下層の密度がそれぞれ ρ_1, ρ_2 であるような二成層流から，下層の流体のみを取水する場合を考える。取水口の開き y_0 が水深 H, h_2^∞ に比べて非常に小さく，line sink とみなせるような場合の限界フルード数は Huber, D. G. により求められている。⁵⁾ 計算にあたっては，まず，内部境界面形状を仮定し，これにより分けられた上・下層それぞれの領域で流れ関数に対するラプラスの方程式を解くという方法をとっている。この方法では内部境界面上での圧力条件（ベルヌーイ式）が満されるまで，試行的に内部境界面形状を変化させなければならないし，またその形状をあらかじめ知り得ないところに難点がある。そこで，ここでは与えられた流量に対する内部境界面形状を決定することを考えよう。

点 (x, y) における流速の成分を，それぞれ u, v とし，内部境界面が $y = f(x)$ という関数で表わされるとすると，下層流体内でのエネルギー総和は

$$\int_L dx \int_0^{f(x)} \left\{ \frac{\rho_2}{2} (u^2 + v^2) + \{ \rho_1 g (H - f(x)) + \rho_2 g (f(x) - y) + \Delta P_2 \} + \rho_2 g y \right\} dy$$

$$= \int_L dx \int_0^{f(x)} \left\{ \frac{\rho_2}{2} (u^2 + v^2) + \rho_1 g H + (\rho_2 - \rho_1) g f(x) + \Delta P_2 \right\} dy$$

で与えられる。同じく上層流体内でのエネルギー総和は

$$\int_L dx \int_{f(x)}^H \left\{ \frac{\rho_1}{2} (u^2 + v^2) + \rho_1 g H + \Delta P_1 \right\} dy$$

となる。 ΔP は静水圧からの変動量であり、点 (x, y) での流線の曲率半径を R とすると、

$$\Delta P_1 = \rho_1 \int_y^H \frac{u^2 + v^2}{R} \cdot \frac{dx}{ds} d\eta$$

$$\Delta P_2 = \rho_1 \int_{f(x)}^H \frac{u^2 + v^2}{R} \frac{dx}{ds} \cdot d\eta + \rho_2 \int_y^{f(x)} \frac{u^2 + v^2}{R} \frac{dx}{ds} d\eta$$

ここに、 dx/ds は流線と x 軸とがなす角の余弦である。

なお、 L は取水口から、流線の曲りが無視される平行流とみなせる点までの距離を示している。

ここで、 x, y 方向の連続式

$$\bar{u} \cdot f(x) = q = u_2 h_2^\infty$$

$$\bar{v} \cdot (L + f^{-1}(y)) = q' \quad y_0 \leq y \leq h_2^\infty \text{ で}$$

$$\text{ただし、} \bar{u} = 1/f(x) \cdot \int_0^{f(x)} u dy, \quad \bar{v} = 1/(L + f^{-1}(y)) \cdot \int_{-L}^{f^{-1}(y)} v dx$$

を考慮し、係数 $\beta = 1/f(x) \cdot \int_0^{f(x)} (u/\bar{u})^2 dy$, $\beta' = 1/(L + f^{-1}(y)) \cdot \int_{-L}^{f^{-1}(y)} (v/\bar{v})^2 dx$ を導入すると、上層が静止しているときの上、下層のエネルギー総和は、

$$E_{\text{total}} = \int_L dx \int_0^{f(x)} \left\{ \frac{\rho_2}{2} (u^2 + v^2) + (\rho_2 - \rho_1) g \cdot f(x) + \Delta P'_2 \right\} dy + \rho_1 g H^2 L$$

より近似的に

$$E_{\text{total}} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{2} \int_{-L}^0 \left\{ F_1^2 \left\{ \left(\frac{\beta}{f(x)} + \frac{\alpha \cdot f'(x)}{2(1 + (f'(x))^2)} \right) h_2^{\infty 2} + \frac{h_2^{\infty} (h_2^{\infty} - y_0)^2}{L} \cdot \frac{\beta' \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2}{\{L + f^{-1}(y_0 - \frac{h_2^{\infty} - y_0}{L} x)\}} \right\} + 2\{f(x)\}^2 \right\} dx + \rho_1 g H^2 L \quad (1)$$

となる。ここに $\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$, $F_1^2 = q^2/\varepsilon g h_2^{\infty 3}$ である。以上のことより、内部境界面形状を求めるには、積分値

$$I = I_1 + I'_1 + I_2 + I_3 \quad (2)$$

ただし

$$I_1 = F_1^2 \cdot h_2^{\infty 3} \int_{-L}^0 \beta / f(x) \cdot dx$$

$$I'_1 = 1/2 \cdot F_1^2 h_2^{\infty 3} \int_{-L}^0 \alpha f'(x) / \{1 + (f'(x))^2\}^2 dx$$

$$I_2 = F_1^2 \cdot h_2^{\infty} (h_2^{\infty} - y_0)^2 / L^3 \cdot \int_{-L}^0 \beta' (L + x)^2 / \{L + f^{-1}(y_0 - \frac{h_2^{\infty} - y_0}{L} x)\} dx$$

$$I_3 = 2 \int_{-L}^0 \{f(x)\}^2 dx$$

を最小にするような $y = f(x)$ を求めればよい。したがって、内部境界面決定の問題は $f(x)$ を変関数、 I を汎関数とする変分問題として表わされる。なお、 $y = f(x)$ は点 $(-L, h_2^\infty)$ をとおり、そこで $df/dx = 0$ の条件を満たす関数である。

以上の問題を解けば、与えられた流量に対する内部境界面形状が先験的に求められる。ところが、この方法でも厳密な形状は決定されえない。というのは、流線の曲りによる重力加速度の減少を評価するさいに、下層での流線が求まっていないことから、近似的な取り扱いをせざるを得ないためである。しかし、この方法によって、内部境界面形状は一応求められるという利点がある。

3. 取水時の限界フルード数

二成層流の場合において、一方の流体を選択取水する問題については、今までにも数多くの研究がなされており、その取水形式に応じた限界流量が求められている。ここでは図1に示すような取水場から下層流体のみを取り出す場合の限界フルード数について検討する。

まず最初に、限界フルード数がどのような形で与えられるかの概略的な検討を行なうために、従来の方法により、内部境界面においてたてたベルヌーイ式に若干の変形をほどこすと。

$$\frac{q_c}{y_0 \sqrt{g y_0}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \pi \left(\frac{K_2}{K_1} \right) \left\{ \frac{h_2^\infty - y_0}{y_0} + \frac{2}{K_2 \pi} \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

なお、(3)式を導びくにあたっては、取水口幅 y_0 は h_2^∞ に比しある程度小さく、無限速での流速は取水口でのものに比べて無視されるものとした。 K_1, K_2 は流況を示す指標であり、 K_1 は取水口での流速分布形より、また、 K_2 は内部境界面の形状により決定される。 $(h_2^\infty - y_0)/y_0 \gg 1$ 、すなわち、取水口幅が下層水深に比し小さい場合には、(3)式は

$$\frac{q_c}{y_0 \sqrt{g y_0}} = 0.855 K \left(\frac{h_2^\infty - y_0}{y_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

の形で表わされ、限界フルード数は $(h_2^\infty - y_0)/y_0$ の $3/2$ 乗に比例して大きくなることがわかる。しかし、一方、 $(h_2^\infty - y_0)/y_0$ が 10° のオーダーに近づくと K_1, K_2 はもはや一定とは考えられず、限界フルード数の値が急激に減少する。したがって、 K_1, K_2 は、それぞれの場合について実験より求められなければならない、また取水口幅が大きくなってくると、(3)式は有効でなくなる。そのため、別の方法を使って、取水口幅がかなり大きくなってきた場合の限界フルード数を求めることが必要になる。その一つとして考えられるのは、Huber が line sink の場合に用いた方法⁵⁾にない、リラクゼーション法を使って限界フルード数を求める方法である⁶⁾。しかし、この方法では、限界フルード数を求めるために、内部境界面をたえず変化させなければならず、かなりの計算時間が必要となる。そこで前節で述べた方法により限界フルード数を求めることを考えよう。

(2)式で示された汎関数を、与えられた境界条件のもとで最小にする変分問題を解く方法には種々のものが考えられる⁷⁾。しかし、被積分関数の形より、これを直接解くには、計算がかなり煩雑になる。そこで、内部境界面を指数関数で近似させて、2節の方法を使うことにする。汎関数 I を最小にするような $f(x)$ として、

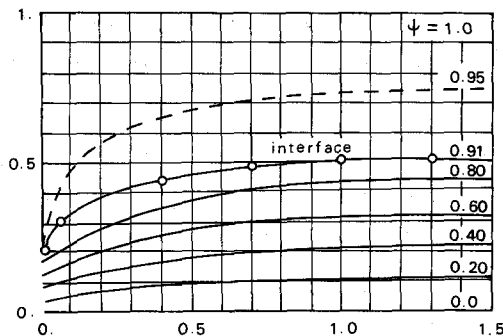


図 2

$$f(x) = ae^{bx} + h_2^\infty \quad (a < 0 \quad b > 0)$$

	X	Y	圧力誤差
1.	0.005	0.20	1.08×10^{-2}
2.	0.06	0.30	6.81×10^{-3}
3.	0.40	0.43	5.05×10^{-3}
4.	0.70	0.47	1.88×10^{-3}
5.	1.00	0.49	3.97×10^{-3}
6.	1.30	0.498	4.95×10^{-1}

計算条件
 $h_2^\infty/H = \alpha = 0.5, U_1/U_2 = \gamma = 0.1$
 $(\rho_s - \rho_0)/\rho_0 = 0.03, \lambda_0/H = 0.2$
 $F_c = 0.17, \text{メッシュ幅} = 0.05$

圧力誤差

$$= \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{\{a + \tau(1 - \alpha)\}^2}$$

$$\times \frac{\Delta}{\rho_s g h_2^\infty} \times (\text{メッシュ幅})^2$$

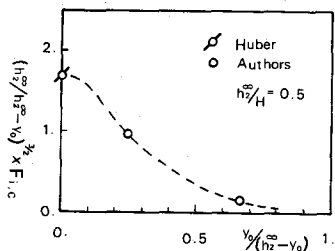


図 3

(4)

とすると、(2)式の各項はそれぞれ積分され、

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \beta F_i^2 h_2^\infty \left\{ L - \frac{1}{b} \ln \frac{a + h_2^\infty}{ae^{-bL} + h_2^\infty} \right\} \\ I_1' &= \frac{\alpha}{4} F_i^2 h_2^\infty \left\{ \frac{ab}{a^2 b^2 + 1} - \frac{ab e^{-bL}}{a^2 b^2 e^{-2bL} + 1} + \tan^{-1} ab - \tan^{-1} (ab e^{-bL}) \right\} \\ I_2 &= \beta' F_i^2 h_2^\infty (h_2^\infty - y_0)^2 b e^{-3b\tau} \left\{ \tau^* + \ln 3b\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3b\tau)^n}{n \cdot n!} \right\} \\ I_3 &= \frac{1}{b} \left\{ a^2 (1 - e^{-2bL}) + 4 a h_2^\infty (1 - e^{-bL}) + 2 b h_2^\infty L \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし τ^* : Euler の定数, $\tau = L + 1/b \cdot \ln \{ (y_0 - h_2^\infty)/a \}$

となる。これより、 I を最小にするような a, b の値を定めるため、 $\partial I / \partial a = 0$, $\partial I / \partial b = 0$ の両式を連立させて最適解を求める。しかし、このままでは方程式が複雑なので、支配的な項のみを残して簡略化することにし、無次元量 $A = a/h_2^\infty$, $B = b h_2^\infty$, $\Gamma = \tau/h_2^\infty$, $L = L/h_2^\infty$ を導入すれば、

$$-\frac{\beta}{B(A+1)} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{B}{(A^2 B^2 + 1)^2} - \frac{\beta'}{\Gamma} \left(\frac{h_2^\infty - y_0}{h_2^\infty} \right)^2 \cdot \frac{1}{A} + \frac{1}{F_i^2} \cdot \frac{A+2}{B} = 0 \quad (6)$$

$$\beta \cdot \frac{\ln(A+1)}{B^2} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{A}{(A^2 B^2 + 1)^2} + \beta' \left(\frac{h_2^\infty - y_0}{h_2^\infty} \right)^2 \cdot \frac{L}{\Gamma} - \frac{1}{F_i^2} \cdot \frac{A(A+4)}{B^2} = 0 \quad (7)$$

と表わすことができる。両式より A, B を定めれば、求まった A の値が $-(h_2^\infty - y_0)/h_2^\infty$ より大きいかなにかにより、与えられた流量が限界量を越えているかどうかの判定が行なわれる。

リラクゼーション法で求めた限界フルード数を示したのが図 3 であり、また、図 4 の実線は K_1, K_2 を定数として計算した(3)式の値を示している。

4. 実験的考察

実験には、長さ 4 m, 幅 25 cm, 高さ 36 cm, の塩化ビニール製水路を用い、水路下流端に設けられたスリット (4~7 mm) から取水した。また、淡・塩水の一方の流体を過マンガン酸カリで着色し、目視により分離取水の限界流量を求めた。実験を進めるにあたって、取水限界になっているか否か

ということは非常に重要であるにもかかわらず、その判断が困難であるため、両層の中間の密度をもつ油滴（ジメチルベンゼンと四塩化炭素の混合物）を注入し、その挙動をも合わせて参考とした。

この実験から求めた限界フルード数を、 $(h_2^\infty - y_0)/y_0$ の関数としてまとめたのが図4である。この図より、限界フルード数と $(h_2^\infty - y_0)/y_0$ との関係は大きく三つの領域に分かれることがわかる。最初の領域は取水口の開きが下層水深に比べてかなり大きい場合であり、ここでは、 $(h_2^\infty - y_0)/y_0$ の低下とともに限界フルード数は急激に減少する。前節でも述べたように、この部分では(3)式の K_1, K_2 は一定と考えられず、同式は有効性を失うため、他の方法により限界フルード数を求めることが必要である。リラクゼーション法を使って求めた値は（計算値と実験値との間には、粘性の効果を無視したこと等に伴う隔りがあるが）、この領域での限界フルード数の低減状態をよく示している（図3）。次の領域は、取水口の開きが下層水深にくらべて

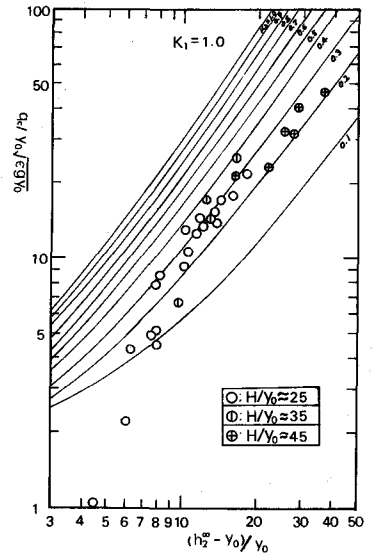


図4

かなり小さい場合で、ここでは(3)式の関係が K_1, K_2 を定数として成り立つことが実験でも確かめられた。3番目の領域は、2番目の領域の一部でもあるが、取水口の開きが下層水深にくらべて十分小さく line sink とみなせるため、限界フルード数が(3)式のように表わされる。この領域では限界フルード数が $(h_2^\infty - y_0)/y_0$ の $3/2$ 乗に比例して大きくなるため、無限遠での下層水深を用いて求めた限界フルード数は一定になる。このことは実験からも示され、 $q_0/(h_2^\infty - y_0)\sqrt{\varepsilon g(h_2^\infty - y_0)} \approx 0.28$ のように表わされる。以上のような領域に分かれる原因として、次のことが考えられる。すなわち、図1のような二次元場からスリットを通して取水するときの内部境界面は、取水口近傍で $\theta_1/\theta_2 = F_1/F_2 \cdot (h_1^\infty/h_2^\infty)^2$ （ θ_1, θ_2 はそれぞれ内部境界面が鉛直面ならびに水平面となす角であり、 F_1, F_2 は上・下層のフルード数である）と表わされるが、そのため、下層流体のみを取水している場合には、内部境界面がほぼ真上から取水口のところに降りてくることになる。また、取水時には、一般に取水口のわずかに上流のところで限界水深をとることが言われており⁸⁾、限界水深に比し取水口の開きが小さいときには、限界水深の地点から、上述のごとく、内部境界面が急速に降下してくる。こ

れに対し、取水口の開きがかなり大きくなると、このような様想を呈さないため、取水口の開きの大きさにより上で述べたような二つの領域が出てくるのであろう。

いままでは、取水口の開きが限界フルード数に与える影響について考察した。ここで明らかになったように、取水口近くでの流線の変化が限界フルード数の大きさに密接な関係を有していることがわかる。このことは、取水口近くの河床上に障害物があって流線が変えられる場合にも、同じことがいわれる。この場合には、分離取水にとってさらに不利な点が出てくる。すなわち、ある限界流量以上で内部

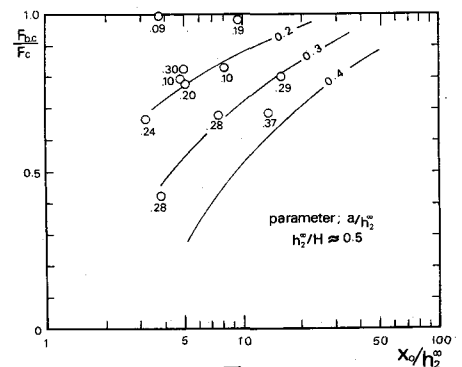


図5

跳水がひき起こされ、内部境界面付近で上・下層流体が混り合うからである。一般に、一方向流れに高さ a の障壁がおかれた場合の限界状態は、上層が静止しているとして、

$$\left(\frac{F_1^2}{2} + 1\right) \alpha_2^\infty - F_1^2 \alpha_2^\infty - \frac{1}{2} (F_1^2 \alpha_2^\infty)^2 = \beta_b \quad (8)$$

$$\text{ただし, } \alpha_2^\infty = h_2^\infty/H, \beta_b = a/H$$

と表わされる。しかし、障壁が取水口に近づくとき、流れはもはや一方向的とは考えられなくなり、(8)式で得られる値より小さなフルード数で限界状態となる。このため、純粋に下層流体のみを取り出すには、取水に対する限界フルード数だけでなく、上述のフルード数をも合せ考えることが必要である。実際に取水口近くに障壁がある場合に、限界フルード数がどのようになるかを見るため、取水口から x_0 の距離に高さ a の障壁を置いて実験した。これによると、障壁を置いたときの限界フルード数は

$$\frac{q_c}{y_0 \sqrt{\epsilon g y_0}} = f(H/y_0, h_2^\infty/H, x_0/h_2^\infty, a/h_2^\infty)$$

と表わされることがわかる。なお、限界フルード数の低減特性をみるため、障壁を置かない場合の限界フルード数との比をとってまとめたのが、図5である。この図より、障壁が取水口に近づくに従い、また、障壁の高さが大きくなるに従って、取水時の限界フルード数が小さくなることがわかる。すなわち、取水口近くに障壁等の障害物があると、遮へい効果が大きくなって、流水断面積が小さくなるからと思われる。

5. あとがき

分離取水に対する限界フルード数は、取水口近傍の状況、たとえば、取水口の開きや障害物の有無等に大きく左右されるため、この点を考慮した限界フルード数を求めることが必要になる。

ここでは、そのような方法の一つを提示した。この方法の有用性についてはほとんど触れることはできなかったが、早急に検討するつもりである。

最後に、実験・整理に協力された学生早野博和君に感謝の意を表します。

・参考文献

- 1) 中川博次；構造物周辺の流れ，水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会，1971
- 2) Long, R.R.; Some aspects of the flow of stratified fluids— II, Experiments with a two-fluid system, Tellus VI, 1954
- 3) Stommel, H. & Farmer, H.G.; Abrupt change in width in two-layer open channel flow, Jour. Marine Research, 11, 1952
- 4) 大西外明・日野幹雄；深層取水の流れへの考察，第14, 15回海岸工学講演会講演集，土木学会，1967, 1968
- 5) Huber, D.G.; Irrotational motion of two fluid strata towards a line sink, Proc. ASCE, EM4, Aug. 1960
- 6) 岩佐義明・野口正人；二成層流からの横方向取水について，第26回年次学術講演会概要集，土木学会，1971
- 7) 変分法の教科書
- 8) Harleman, D.R.F. & Garrison, J.M.; The effect of intake design on condenser water recirculation, MIT Report No. 56, 1962