

剪断流中に置かれた平板上の三次元層流境界層

東京工業大学工学部 正員 吉 川 秀 夫
東京工業大学工学部 正員 ○池 田 駿 介

1. まえがき

平板上の層流境界層は流れが二次元的である場合には Blasius⁽¹⁾ によって解析解が得られている。ここでは流れが一様なポテンシャル流ではなく、平板が剪断流の中に置かれた場合について考察を行う。この時、流れは図に示すように Blasius の解を Z 方向に単に積み重ねて行ったような流れではなく、流線がねじれる為に Z 方向に圧力勾配が生じ主流に直交する w -component が生ずる。

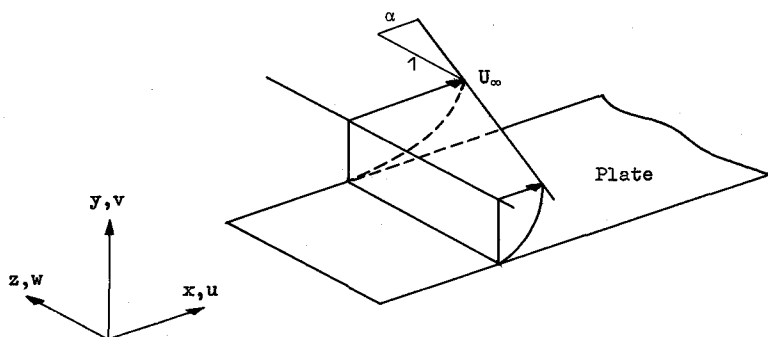


Fig. 1 Perspective view of the model and its co-ordinate system.

2. 相似性について

三次元境界層の問題を解くことが困難であるのは、方程式が3個の独立変数を持つ非線型方程式である為である。流れが一方向に一樣、あるいは相似な流れである場合には独立変数を一個又は二個除くことができるから方程式を解くことができる。ここで考える流れは一樣な流れではないから、相似となる条件について考察を進める。このような流れについて Birkhoff の方法を用いて相似性が成立する為の条件を調べると、境界層の厚さがほぼ $x^{\frac{1}{2}}$ に比例して増大すると考えるのが妥当であり、この時相似性が成立するには

$$\frac{u}{U_{\infty}} = f(\eta)$$

$$\frac{v}{U_{\infty}} = \nu^{\frac{1}{2}} U_{\infty}^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} g(\eta)$$

$$\frac{w}{U_{\infty}} = U_{\infty}^{-1} x^{-1} h(\eta)$$

$$\eta = y U_{\infty}^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

でなければならない。ここに、 $\alpha = dU_{\infty}/dz$, ν : 動粘性係数, U_{∞} : 境界層外部における主流の

速度である。しかしこの結果には矛盾が含まれている。なぜなら w/U_∞ の項において α が分母に含まれている為に $\alpha = 0$ の時、即ち主流が一様なポテンシャル流れである時に $w/U_\infty = \infty$ となり、平板上の二次元層流境界層の流れとは一致しないからである。このような流れでは α の大きいほど w は大きくなると考えられるので、ここでは式(1)に示されるような形に置いた。即ち

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_\infty} &= f(\eta) \\ \frac{v}{U_\infty} &= \nu^{1/2} U_\infty^{-1/2} x^{-1/2} g(\eta) \dots\dots\dots (1) \\ \frac{w}{U_\infty} &= \alpha x U_\infty^{-1} h(\eta) \end{aligned}$$

である。式(1)には z が明確な形でははいっていないが U_∞ が z の関数であることから暗には含まれているといえる。ここで考えているような流れで相似性が成立するならば、境界層の厚さが $x^{1/2}$ に比例して増大しないことは明らかであり、その時は z がどのような形ではいてくるかということを更に詳細に調べる必要があるだろう。

3. 境界層の方程式について

三次元の境界層方程式は主流方向に圧力勾配がないとすれば

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots (2) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

で表わされる。式(1)を式(2)に代入して常微分化すれば、従属変数は f, g, h, p の四個、独立変数は η の一個であり、境界条件を満足するように計算を行って行けばよいことになる。更に $\eta = 0$ の近傍で級数展開を行えば四個の従属変数の間である一つの関係が得られるので、実際の計算に当っては三個の従属変数の $\eta = 0$ 近傍での値を夫々変化させて方程式を積分して行き、他の境界条件に合致するような値を探せばよいことになる。しかし三個の値を独立に変化させて解を求めるのはかなり手間のかかることであり、ここでは圧力項を他の項から見積って消去させることにする。

y 方向について圧力勾配が遠心力と釣合っているとすれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{u^2}{r} \\ &= \frac{u^2}{\frac{d^2 \delta^*}{dx^2} y} \end{aligned}$$

ここに

δ_y^* = 高さ y における排除厚

である。よって定義より

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^y \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \nu \frac{1}{2} x \frac{1}{2} U_\infty \frac{1}{2} \int_0^\eta (1-f) d\eta \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\nu \frac{1}{2}}{x \frac{3}{2} U_\infty \frac{1}{2}} (\eta f - \int_0^\eta f d\eta + \eta^2 f')\end{aligned}$$

となる。 r は正の方向をとって定義してあるので正の値を採用し、 $u/U_\infty = f$ であることに注意すれば、結局 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{u^2}{r} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\nu \frac{1}{2} U_\infty \frac{3}{2}}{x \frac{3}{2}} f^2 (\eta f - \int_0^\eta f d\eta + \eta^2 f')\end{aligned}$$

p の値は y で積分し、

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} &= \frac{\nu \frac{1}{2} U_\infty \frac{3}{2}}{4 x \frac{3}{2}} \int_0^y f^2 (\eta f - \int_0^\eta f d\eta + \eta^2 f') dy + c(x, z) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\nu U_\infty}{x} \int_0^\eta f^2 (\eta f - \int_0^\eta f d\eta + \eta^2 f') d\eta + c(x, z)\end{aligned}$$

で与えられる。流線の曲りによる圧力のみが、 (x, z) 方向に変化すると考えれば $c(x, z)$ は定数である。故に $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ は次のように与えられる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\nu \alpha}{4x} \left\{ \int_0^\eta f^2 (-\int_0^\eta f d\eta + \eta f + \eta^2 f') d\eta + \frac{1}{2} \eta f^2 (-\int_0^\eta f d\eta + \eta f + \eta^2 f') \right\} \dots\dots\dots (3)$$

圧力の値が他の従属変数 f の値で表わせたので式(2)中の y 方向の運動方程式は不要となり、結果として方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

となる。この(4)式中に(1)，(3)の兩式を代入し整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \eta f f' + g f' + \left(\frac{\alpha x}{U_\infty}\right)^2 h \left(f + \frac{1}{2} \eta f'\right) &= f'' \\ f \left(h - \frac{1}{2} \eta h'\right) + g h' + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha x}{U_\infty}\right)^2 \eta h h' &= h'' - \frac{1}{4 \text{Re} x} \left\{ \int_0^\eta f^2 \left(-\int_0^\eta f d\eta + \eta f + \eta^2 f'\right) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \eta f^2 \left(-\int_0^\eta f d\eta + \eta f + \eta^2 f'\right) \right\} \quad \text{----- (5)} \\ -\frac{1}{2} \eta f' + g' + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha x}{U_\infty}\right)^2 \eta h' &= 0 \end{aligned}$$

この方程式中には無次元のパラメータ $\alpha x/U_\infty$ がはいっているので位置 (x, z) が与えられればパラメータの値が定まり，方程式は η のみの関数となり適当な境界条件の下で解けることになる。従って一見相似性を仮定して解いていることになるが実際には $\alpha x/U_\infty$ の値が各点で異なる為に f, g, h の値は各点で異なり，厳密な意味では相似性は成立していない。主流が剪断流でない場合，即ち $\alpha = 0$ であるようなポテンシャル流れの場合には方程式(5)は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \eta f f' + g f' &= f'' \\ \text{----- (6)} \\ -\frac{1}{2} \eta f' + g' &= 0 \end{aligned}$$

となり，Blasius が求めた方程式と全く一致する。

4. 境界条件について

境界層の外縁での値に符号 " 0 " を付けることにすれば境界条件は

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad f = g = h &= 0 \\ \eta = \eta_0 : \quad f = 1 \quad g = g_0 \quad h = h_0 \end{aligned} \quad \text{----- (7)}$$

である。 h_0 の値については本質的に外部の主流によって与えられるべき性質のものであり，境界層の内部から定めて行くことのできないものである。ここでは主流中では $h_0 = 0$ として境界層の方程式を解くものとする。

5. 計算結果について

図-2に方程式(5)を境界条件(7)の下に解いた一例を示す。実線は主流が剪断流の場合、即ち $\alpha \neq 0$ の場合の解であり、計算に際して用いられた Re_x および $\frac{\alpha x}{U_\infty}$ の値はそれぞれ200及び1である。点線は境界層の方程式(6)を同じ境界条件の下に解いたBlasiusの解であり、両者の比較がなされている。 Re_x を小さくとり、 h の値が大きくなるようにしても f, g の値はBlasiusの解と大差のないことがわかる。従って普通に見られるように層流の条件、 $Re_x < 3 \times 10^5$ では h はほぼ無視できる程小さいと言えるだろう。しかしこの計算では $h_0 = c$ としてあるが、境界層の外側の主流中で h_0 の値が大きい場合には f, g の値はBlasiusの解とかなり差の生ずる恐れがある。この時にはその h_0 に接続して行くように境界層の方程式を解けばよい。なお計算に際して用いた差分の間隔は $\Delta \eta = 0.1$ であるが、この値を用いて計算したBlasiusの解をHowarth⁽²⁾が求めた結果と比較すると有効数字三桁まで一致し、ほぼ正確な値が求められているものと思われる。

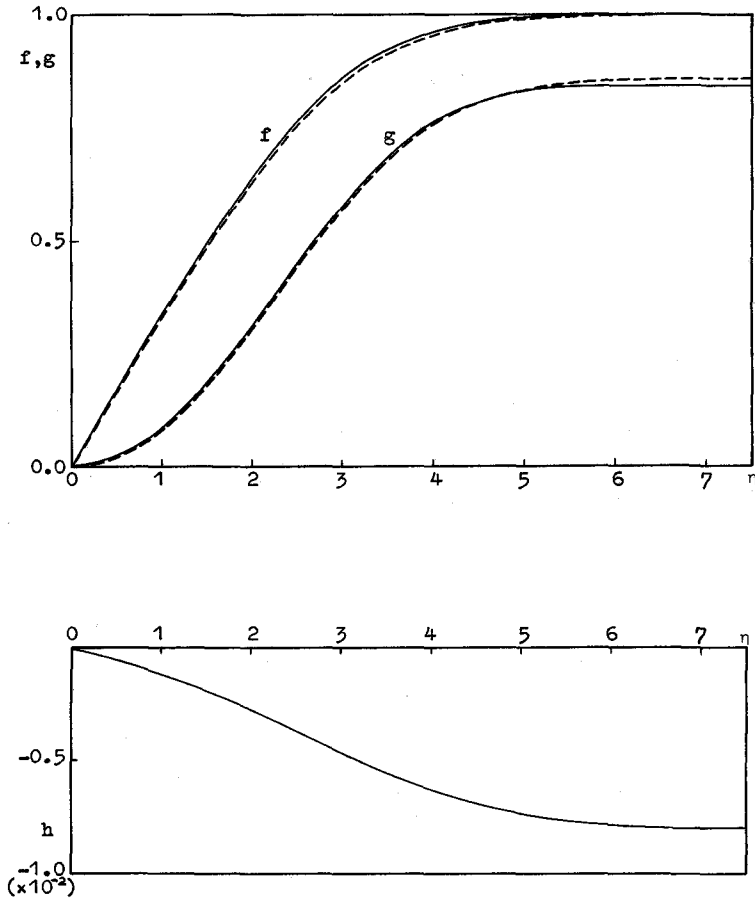


Fig. 2 Solution of f, g and h .

6. あとがき

以上， w -componentがある場合に流れがどのように変化するかということについて述べた。計算上の見積りではこのような二次的な流れは小さいということが判ったが，実際には運動量あるいは物質の輸送にかなり大きな寄与をなすものと思われ軽々しく無視することのできないものである。今後の課題としては(1)式で表わされるような相似性の仮定を更に詳細に検討し，又圧力勾配 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ についてももっと正確に見積る必要があるだろう。

最後にこの研究をすすめるに当って有益な助言を与えて下さった水工研究室の皆様に感謝の意を表わします。

—参考文献—

- (1) Schlichting, H., Boundary — Layer Theory, Mc GRAW—HILL, 6 th Ed. (1968)
- (2) Howarth, L., On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations.
Proc. Roy. Soc., London, A164, 547—579 (1938)