

蛇行流における分散係数の予測

東京工業大学 正員 ○福 岡 捷 二
アイオワ州立大 William W. Sayre

まえがき

流水中の拡散質は流体の種々の形態の輸送過程によって流下にともない広がり続け、ピーク濃度は次第に減衰する。拡散質が十分な距離流下すると断面内でほぼ一様に混合され、濃度変化は一次元すなわち流れ方向のみとなり濃度の減衰は一次元拡散方程式に従うことはよく知られている^{1),2)}。すなわち拡散質の分散は次の3つの過程に分割される³⁾:(1) source 付近で convection が卓越している領域 (initial convective period) (2) Initial convective period と diffusive period の中間領域 (Taylor's period) , (3) 分散が一次元拡散方程式に従う領域 (diffusive period) である。この中で特に重要なのは(3)の diffusive period での分散であり、流路に入った汚濁物質がいつ、どのような濃度分布特性をもって下流の各地点に到達するかを知る必要がある。そのために何らかの方法で分散係数 K_x を予測しなければならない。しかし自然河川の分散特性は流路ごとに著しく変化することが観測されており^{4),5),6)}河川の合理的水質管理のため個々の流域の分散特性を確実に把握することが必要である。著者は^{7),8)}自然河川の分散機構を類推する手掛りとしてきわめて単純化された矩形断面蛇行水路を用い分散機構の基礎的研究を行ない次のような主要な結論を得た。(1) 蛇行流の無次元分散係数は、等価な直線流の分散係数に比し著しく大であり、流速の横断方向変化が鉛直方向変化に比し主流方向の分散に大きく関係する。(2) 蛇行水路における分散は bend の存在によって生ずる主流の横断速度分布とその結果として生ずるラセン流によって著しく影響を受けるが、平均的分散過程はみかけの分散係数を用いると直線流と同様に initial convective period を除き濃度の減衰は一次元拡散方程式に従う。(3) 蛇行流における局所的移流分散係数は、主流速の横断方向変化を示すパラメーター $\beta = \overline{u'^2} / \bar{u}^2$ とともに増加し、ラセン流強度とともに減少する。

本研究は、このようにして得られた知見を基礎として流路断面形状や流速分布を測定することなく流路の幾何学的特性量および水理量から自然河川の diffusive period における主流方向の分散係数を予測することを目的としている。

実験装置と実験結果

2.5 run の分散に関するデータを bend 間に直線部をはさみ交互に向きを変える13個の bend からなる全長2.5 m、深さ0.2 mの矩形断面水路から得た。そのうち13 run は巾が0.25 mで水理学的に滑な底面をもつ水路で行なわれ (Series S) 7 run は同一水路であるが、平均粒径5.2 mm の砂利を一樣にはりつけた水理学的に粗な底面をもつ水路 (Series R) で、残りの5 run は (Series SN) 再び底面は滑であるが、Series S, R が行なわれた水路の中心線沿いに隔壁を設け巾が0.125 mに縮小された蛇行水路で行なわれた。拡散質は10%の塩水にメタノールをくわえ、比重1.0に調節した混合液である。縦分散係数 K_x は Routing 法によって計算された値を用いた。実験結果は、表-1に要約されている。実験装置、方法および結果の詳細は、著者の論文に記述されているので参照されたい。

表-1 実験結果

Run No	水路巾 B (cm)	水深 d (cm)	径深 R (cm)	勾配 S×10 ⁴	流速 $\bar{u}$ (cm/s)	u_* (cm/s)	Re $\times 10^{-4}$	Fr	$\frac{\bar{u}^2}{u_*^2}$	$\frac{Kx}{Ru_*}$	Run No	水路巾 B (cm)	水深 d (cm)	径深 R (cm)	勾配 S×10 ⁴	流速 $\bar{u}$ (cm/s)	u_* (cm/s)	Re $\times 10^{-4}$	Fr	$\frac{\bar{u}^2}{u_*^2}$	$\frac{Kx}{Ru_*}$
S-1	25.0	56.4	3.90	5.82	2.24	1.49	3.18	0.30		1.43	R-1	25.0	60.0	5.31	5.82	1.58	1.74	3.46	0.205		1.40
S-2	#	34.2	2.71	#	2.01	1.25	2.30	0.345	0.028	3.21	R-2	#	3.75	3.51	#	1.20	1.40	1.72	0.189		2.90
S-3	#	30.5	2.47	#	1.98	1.19	2.08	0.359		3.42	R-3	#	4.48	4.06	#	1.40	1.53	2.34	0.210		2.48
S-4	#	35.1	2.75	#	1.91	1.25	2.41	0.327		3.02	R-4	#	3.60	3.20	1.20	1.79	1.95	1.77	0.304		3.22
S-5	#	42.4	3.17	#	2.25	1.37	3.12	0.348		2.25	R-5	#	5.67	4.94	#	2.26	2.41	3.44	0.307	0.044	1.68
S-6	#	24.4	1.98	#	1.63	1.16	1.23	0.260		4.24	R-6	#	3.05	2.83	#	1.67	1.83	1.46	0.305		3.70
S-7	#	55.2	3.81	#	2.24	1.49	3.10	0.298	0.023	1.64	R-7	#	7.01	6.07	#	2.54	2.68	5.10	0.307		
S-8	#	2.38	1.98	1.20	2.41	1.53	1.56	0.500		4.15	SN-1	1.25	2.44	1.31	#	2.14	1.31	1.39	0.455		3.80
S-9	#	5.67	3.93	#	3.84	2.17	5.06	0.515	0.028	1.48	SN-2	#	3.45	2.26	#	2.68	1.62	2.19	0.455		2.38
S-10	#	3.42	2.71	#	2.89	1.80	2.78	0.495	0.036	2.37	SN-3	#	4.91	2.78	#	3.16	1.80	3.13	0.453		1.47
S-11	#	4.42	3.26	#	3.29	1.95	3.88	0.500		1.90	SN-4	#	2.84	1.98	#	2.47	1.53	1.70	0.465		2.80
S-12	#	2.32	1.98	#	2.46	1.53	1.65	0.520			SN-5	#	6.22	3.14	#	3.26	1.92	4.10	0.413		1.15
S-13	#	5.67	3.93	#	3.90	2.17	5.15	0.523													

縦分散係数と水理量，流路の幾何学的特性量の関係

さきの研究^{7),8)}で分散係数が断面内速度分布および水路巾方向の乱流拡散係数によって著しく影響をうけることを知った。しかし，自然河川でこれらを測定することは多大の労力と費用を要するため水理量，流路の特性量，流体性質から分散係数を決定し得ることが望ましい。次元的考察からこの関係を考えてみよう。縦分散係数 Kx を従属変数と仮定すると関連する水理量は，断面平均速度 $\bar{u}$ ，摩擦速度 u_* ，流体性質としては，流体密度 ρ ，粘性係数 μ ，重力加速度 g ，幾何学的特性として，曲率半径 r_c ，bend 中心角 θ ，直線部の長さ T ，平均水路巾 B ，潤辺 P ，勾配 S を用いると，無次元分散係数は次式で表わされる：

$$\frac{Kx}{Ru_*} = F \left(\frac{B}{d}, \frac{r_c}{B}, \frac{L}{r_c}, \frac{r_c}{d}, \frac{\bar{u}}{u_*}, Re, Fr, \theta \right) \quad (1)$$

(1)式で bend 長 L は $T + r_c$ にとられている。これは自然河川の幾何学的特性量を地図から読み取る際に直線部と曲線部の分離に含まれる誤差を取り除くために行なわれた。 L/r_c は $T/r_c \cdot \theta \rightarrow 0$ につれて θ に近ずき，それは sinuosity ratio⁹⁾ に密接に関係づけられる。(1)式にもとづく関係式を見出すために，表-1の実験データの他に表-2の自然河川データが用いられた。自然河川データはすべて対象とされた流域の平均値であるが，個々の L と θ の値は，かなり変化する傾向がある。

表-2 自然河川の水理量と流路特性

River	Reference	Bend No.	Sinuosity	B (m)	L (m)	r_c (m)	d, R (m)	$\bar{u}$ (m/s)	u_* (m/s)	$\frac{\bar{u}^2}{u_*^2}$	$\frac{Kx}{Ru_*}$ (m ² /sec)
Missouri River Ia-Na	(6)	31	1.35	183.0	3965.0	2196.0	3.26	1.62	0.079	$\frac{0.20}{(0.14 \sim 0.25)}$	9.21
Copper Creek, Va.	(5)	7	2.78	18.3	732.0	106.8	0.37	0.22	0.110		9.9
Powell River Tenn.	(5)	2	2.20	36.6	1433.5	305.0	0.88	0.16	0.052		9.5
Green-Duwamish River Wash	(4)	5	1.94	20.1	610.0	198.3	1.10	0.28	0.049	0.08	7.4

無次元分散係数は(1)式の関数関係で定まるが、(1)のすべての無次元項を考慮に入れて検討することは困難である。本研究のように流れの $Fr < 0.5$, $Re > 10^4$ に保たれる場合には、 Fr 数、 Re 数の分散に及ぼす役割は他の無次元項に比して小さいと考えてよいのでこれ以後の考察で Re 数と Fr 数を除外する。(1)式の無次元項の種々の組み合わせに対し Kx/Ru_* と Kx/du_* が調べられた。このようにして得られたもののうち実験室と自然河川データの分散を統一的に説明し得る可能性のある2つの関係が図-1にプロットされている。すなわち

$$\frac{Kx}{du_*} = \left(\frac{Br_c^3}{L^2 d^2} \right)^{0.86} \tag{2}$$

$$\frac{Kx}{Ru_*} = 0.8 \left(\frac{r_c^2}{Ld} \right)^{1.4} \tag{3}$$

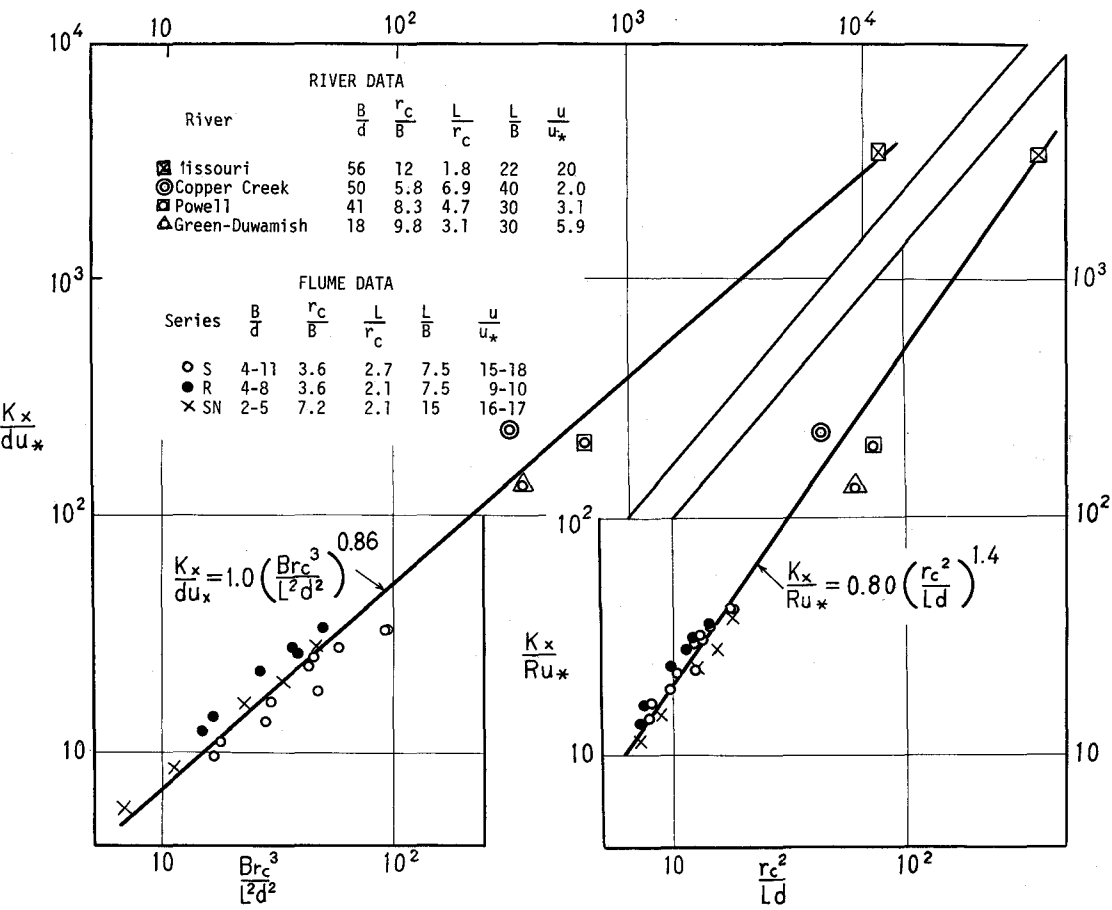


図-1 無次元分散係数 Kx/du_* 、 Kx/Ru_* と流路特性の関係

図-1 a の実験室データは明らかに粗度の影響により又わずかに巾-深さ比によって分離されている。図-1 b で縦軸の d を R で置き換え、横軸から B/d を取り除くと粗度の影響を考慮できるが、巾の影響をやや過大に補正しすぎている。3組の実験室データを1本のカーブで表わそうとすると自然河川データをカーブから外してしまう傾向がある。これに対する補正は r_c/L の高次項を導入することによって可能になるが、 r_c/L が実験水路では変数でなかったため果してこの操作が意味をもつか

どうか疑問である。方程式(2)と(3)の関数形はBにあまり関係しないことおよび Kx が直線流路で無限大となる欠点を有している。しかし、 Kx の r_0/L に対する強い相関は十分に発達したラセン流を生み出し得るような長い曲線部では、水路巾方向の convective mass transportが縦方向の分散を抑える傾向があることを示しており、これはさきの研究^{7),8)}で明らかになった局所的移流分散係数がラセン流の強度に逆比例する実験事実と符号する。しかし、 L と r_0 はいずれも自然河川でほぼ線形的にBに関係づけられるので⁹⁾(2)(3)式の関係が物理的に誤まっているという可能性がないとはいえない。

さらに物理的な洞察を得るため Taylor の理論¹⁰⁾を拡張した Fischer の analogy⁹⁾を用いる：
すなわち、分散係数は

$$Kx = \overline{u^2} T_L \quad (4)$$

ここに、 $\overline{u^2}$ は断面平均速度 $\bar{u}$ からの速度の場所的变化の2乗平均であり、 T_L は移流分散に関する Lagrangian time scaleである。蛇行流に対し次の3つの必ずしも排他的でない T_L の表示が考えられる。

$$T_L \propto \frac{d^2}{\varepsilon_y} \quad (5), \quad T_L \propto \frac{B^2}{\varepsilon_z} \quad (6), \quad T_L \propto \frac{L}{\bar{u}} \quad (7)$$

(5)式は二次元流れにおいて断面内の拡散に要する時間と解釈され、著者の研究から明らかなように蛇行流では水路巾方向の変化が鉛直方向の変化に比して分散に大きく貢献するので(5)式の時間スケールは必ずしも適切でない。(6)式は水路巾方向に速度変化がある広い水路に対する Fischer の T_L の定義であり、水路巾方向への輸送が gradient type で表わされる限り正しく、三次元的な流れの場で拡散質が断面内で様になるに要する時間と考えられる。(5)(6)式はいずれも Euler 的な立場で定義された時間スケールである。(7)式は bend によって生み出されるラセン流が水路巾方向への質量輸送の主要な要因であるような場で T_L が水粒子の bend をまわるに要する平均時間であるという仮説にもとづけられており、Taylor の理論によってこの時間スケールの妥当性を裏付けることができる。

Taylor の Lagrangian turbulent theory によれば、分散は

$$\sigma_x^2(t) = 2 \overline{u^2} \int_0^t (t-\tau) Ru''(\tau) d\tau \quad (8)$$

ここに $\overline{u^2}$ は時間平均速度からの変動速度の2乗平均である。 $\sigma_x^2(t)$

(8)式はかなり大きい t に対し $\lim_{t \rightarrow \infty} Ru''(\tau) \rightarrow 0$ であるので

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &\approx 2 \overline{u^2} t \int_0^t Ru''(\tau) d\tau - 2 \overline{u^2} \int_0^t \tau Ru''(\tau) d\tau \\ &= 2 \overline{u^2} t \cdot Lt - (2 \overline{u^2} \times Ru''(\tau) \text{ の一次モーメント}) \end{aligned} \quad (9)$$

十分に小さい t に対し

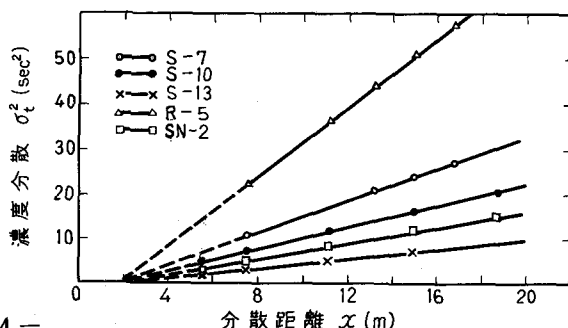
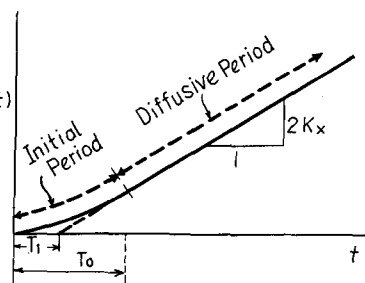
$$\sigma_x^2(t) = \overline{u^2} t^2 \quad (10)$$

非常に大きい t に対し

$$\sigma_x^2(t) \approx 2 \overline{u^2} t \cdot Lt \equiv 2Kxt \quad (11)$$

$$Kx = \overline{u^2} \cdot Lt \quad (12)$$

(9)式の第一項中の積分は Lagrangian integral time scale である。(9)式から $\sigma_x^2(t) \sim t$ が t 軸と交叉する点は Lagrangian velocity



autocorrelation function の一次モーメントで平均渦を特長づける time scale である。(9) (10) 式から Taylor 理論による $\sigma_x^2(t)$ と t の関係は図-2 で与えられている。 図中 T_0 は $Ru''(\tau)$ が零になるに要する時間である。 蛇行水路での実測結果⁹⁾から $\sigma_i^2(x) \sim x$ をプロットしたものが図-3 であり、外挿によって x 軸との交点は $x \approx 1.9 \text{ m}$ でこの長さは水理条件に無関係にほぼ 1 bend 長に相当する。 同様にして Missouri 川, Green-Duwamish 川について検討するといずれも交叉する点は 1 bend 長であり, これを time domain に変換すると(7)式で表された Lagrangian time scale の有効性を容認できるであろう。(6)式, (7)式を(4)式に代入すると次式を得る:

$$\frac{Kx}{d\bar{u}} = \alpha_1 \left[\frac{B}{d} \right]^2 \quad \text{ここに } \alpha_1 \propto \frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2} \cdot \frac{\bar{u}}{\varepsilon_s / d\bar{u}_s} \quad (14)$$

$$\frac{Kx}{d\bar{u}} = \alpha_2 \left[\frac{L}{d} \right] \quad \text{ここに } \alpha_2 \propto \frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2} = \beta \quad (15)$$

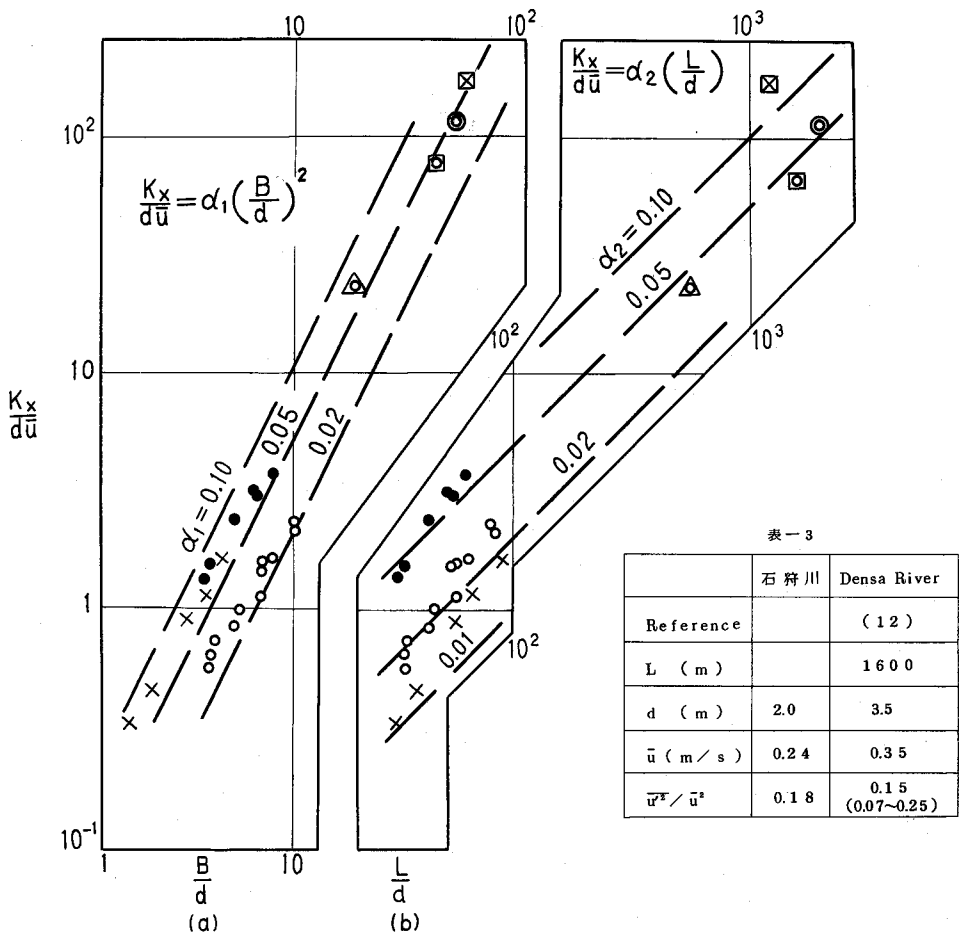


図-5 無次元分散係数 Kx/du の流路特性による変化

図 5 a, 5 b は $Kx/d\bar{u}$ を (14), (15) 式の〔 〕項の関数で α_1, α_2 をパラメータとして示している。同一水路で行なわれた一連の実験データに対し、パラメータ α_1 が定数である何らの理由もないけれども図 5a に示されたデータポイントは定数 α_1 の line に平行に並んでいる。 α_1 と $\bar{u}^2/\bar{u}^2 \cdot \bar{u}/u_* / \epsilon_z / du_*$ を関係づける比例定数 (Eulerian time scale と Lagrangian time scale の比) は流路幾何形状や速度分布形などによって変化するので現時点では (14) 式を定量的に把握できない。ここでは比例定数として対数速度分布式と $\epsilon = 0.4$ をもつ二次元流に対し Fischer³⁾ が求めた値 $1/14.8$ を用い Run S-9, S-10, R-5 に対する Chang¹¹⁾ の実測値 $\epsilon_z/du_* = 0.9, 0.92, 0.62$ と同じ run に対する表-1 の $\bar{u}^2/\bar{u}^2$ の値を用いて (14) 式から計算された α_1 の値はそれぞれ 0.037, 0.042, 0.045 である。 $Kx/d\bar{u} \sim B/d$ の関係から求められたそれぞれの run number に相当するデータ点は、上述の α_1 とほぼ同一値を持ち、 $Kx/d\bar{u}$ は少くとも観測値と同じオーダーを有していることが知れる。図 5 a から Kx の値を予測できることはいうまでもないが、逆に Kx の値を知れば水路巾方向の乱流混合係数 ϵ_z をみつめることができることに注目すべきである。

同様に先にのべた $T_L \sim L/\bar{u}$ の有効性にもとずき、 $\alpha_2 = \bar{u}^2/\bar{u}^2$ と仮定して Kx の値を予測することができる。実験室データを $Kx/d\bar{u} \sim L/d$ でプロットすると表-1 から見出される $\bar{u}^2/\bar{u}^2$ とほぼ一致する α_2 の領域に計算値がおちることが知れる。流路の代表断面で横断形状、流速分布が与えられている自然河川の $\bar{u}^2/\bar{u}^2$ が表-2, 表-3 に示されている。これから自然河川では $\bar{u}^2/\bar{u}^2$ が 0.05 ~ 0.3 の範囲にありこれらの値は流路幾何形状によって変化する。実験室データと同様に Missouri 川 Green-Duwanish 川についても図 5 b から見出される α_2 と表-2 からの α_2 の対応はかなりよく、観測値の 30 % 以内の精度で Kx の値を予測することができる。

しかしながら、分散係数は (6) 式又は (7) 式〔 (14) 式, (15) 式〕で必ずしも一義的に定まるのではなく分散に関係する time scale が流路の幾何学的特性に支配されるため、一本の流路でも局所的には巾、bend 長又は水深が time scale を規定する卓越した特性長になり得るので、自然河川の分散係数は (6), (7) 式の組み合わせから決まると考えるのが妥当である。蛇行流の速度分布、ラセン流および水路巾方向の混合に関する多くのデータとよりよい解析的モデルが確立するまで十分な配慮をもって (2), (3), (14), (15) 式が適用されれば工学的な応用に対して十分有効であるといえる。ここに述べられた方法は、多大の労力と費用を要する流路の断面形状や流速分布を測定せずに平均的幾何学的特性量および水理量から簡単に Kx を予測できる利点を有しているが、詳細な流路幾何形状や粗度に関する考慮が払われていないためやや正確さを欠くことは否めない。

参考文献, 1) Fischer, H. B., Int. Jour. Air and Water Pollution, Vol. 10, No. 5, 1966. 2) Sayre W.W., Chang. F. M., U.S. Geol. Survey Prof. Paper 433 E, 1968. 3) Fischer, H.B., Proc. ASCE, HY6, 1967. 4) Fischer, H.B., U.S. Geol. Survey Prof. Paper, 582-A, 1968. 5) Godfrey, R.G., Frederik, B.J., U.S. Geol. Survey, Prof. Paper, 433-K, 1970. 6) Yotsukura, N., Fischer, H.B., Sayre, W.W., Geol. Survey Water Supply Paper 1899-G, 1970. 7) 福岡捷二, 第 26 回年講講演集 2 1971. 8) 福岡捷二, 土木学会論文報告集投稿中. 9) Leopold, L.B., Wolman, M.G., Bulletin Geol. Soc. America, Vol. 71, 1960. 10) Taylor, G.I., Proc. London Math. Soc. Series 2. 20. 1921. 11) Chang, Y.C., Ph.D. thesis, the univ. of Iowa, 1971. 12) Rozovskii, I. L., Academy of Science of the ukrainian SSR, 1957, translated by Prushansky, Y.,