

1 まえがき

浸透層内の流れは、浸透層の幾何学的特性、流体の物理的特性および流れの力学・運動学的特性により支配される。一般的には、浸透層内の流れも Navier-Stokes の式で表わされる¹⁾が、複雑な空隙構造からなる境界条件の表現さえ不可能で、この式からは流れの定性的な考察が期待されるだけである。そこで、流れの解析は、主として、Darcy 則などの流れの平均水理量に関する経験式によっている。もちろん、通常、これらの経験式により解決される問題も多いが、水理量を知り、問題の本質により一歩でも近づくには、流れの微視的機構の研究によらなければならない。

本研究では、確率変数により空隙系のモデルを与え、つぎに、モデル内の流体運動を吟味することにより、流れの微視的特性を統計的に演繹する解析法を試みる。すなわち、浸透層構成粒子特性およびその配列の幾何学的特性が与えられるとき、確率モデルにより浸透層内の流れをシミュレートし、流れの微視的挙動およびその積分・平均値としての平均水理量の予測法を検討するものである。解析において、浸透層は土粒子などの粒状体からなり、浸透層自体の変形は考えず、また、流体により飽和されているとする。

2 浸透層の空隙系特性とそのシミュレーション

浸透層の空隙系は、有効空隙の結合体であるから、空隙空間の任意の位置で浸透層構成粒子とその配列に特性づけられる円筒状単位流路(図-1)の樹枝状結合体(図-2)であるとする(以下、空隙系モデルとよぶ)。したがって、空隙系は、単位流路のシミュレーションとその空隙空間における組立てにより与えられる。

2-1) 単位流路

単位流路は、図-1に示されるように、直径 d_i 、長さ l_i および傾き角 θ_i 、 ϕ_i の幾何学的量により表わされる。以下に、浸透層構成粒子との関係においてこれらの量の表示法を示す。

(i) 流路徑 d_i

浸透層の断面(図-3A)において、粒子の中心を相互に結んだ三角形に含まれる空隙面積と等しい面積の円の直径を d_{pi} とし、これを流路徑要素とよぶ。実際のシミュレーションにおいては、図-3B、図-4のように断面を横切る直線上の連続する3組の空隙部と粒子部による三角形から d_{pi} を求め²⁾ d_{pi} を d_i へ変換する。

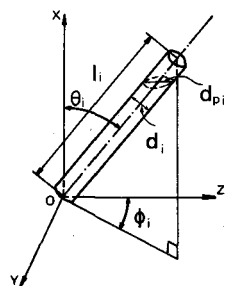


図-1 単位流路モデル

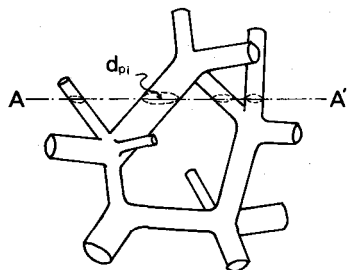


図-2 空隙系モデル

(ii) 流路長 l_i

図-4における l_i' を流路長要素とよび、 $l_i = C_e \cdot l_i'$ とする。 C_e は後に定められる実験定数である。

(iii) 傾き角 θ_i, φ_i

浸透層が等方性のとき、流路の傾き角が $\theta \sim d\theta$ 、 $\varphi \sim d\varphi$ となる幾何学的割合は、 $\sin\theta d\theta d\varphi / 2\pi$ である(図-5)。

ただし、空隙系モデル内を運動する流体素分がとる流路の角度においては、さらに、運動学的要素を考慮しなければならず、これは、後に検討する。

2-2) 空隙系モデル

単位流路の空隙空間での組立てについて述べる。

空隙系モデル内の流体素片の動きに注目すると、乱数を用いてつぎの(i)~(iii)により、単位流路の樹枝状結合体を与えられる。

(i) 流体素片に番号をつけ、流れの初期条件に合せて、空隙空間に配置する。

(ii) 番号をつけられた流体素片に、それぞれ乱数により1組の単位流路要素($d_i, l_i, \theta_i, \varphi_i$)を与える。

(iii) ピエゾ水頭勾配および運動の式にしたがい、各流体素片が与えられた流路の出口に達したとき、再び(ii)で述べた方法により新しい流路要素を与える。

2-3) d_p, l' のシミュレーション結果の検討

ガラス球からなる浸

透層を樹脂で固化させ

た試料を切断し、その

断面写真から得られた

d_p, l' とシミュレーシ

ョンにより得られたそ

れを示したのが図-6、

図-7であり、それぞ

れ正規分布、対数正規

分布となることがわか

る。しかし、変数相互

の関係を明確にするに

は至らなかった。

図-6 流路径要素の分布

図中、 Δ は室田、佐藤³⁾による実験による値である。

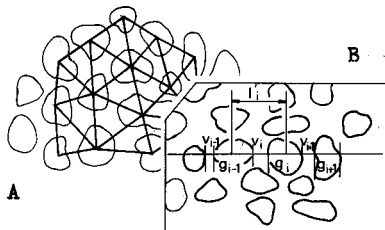


図-3 浸透層断面

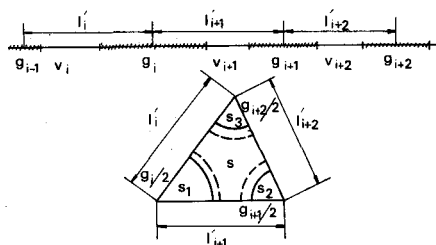


図-4 単位空隙モデル

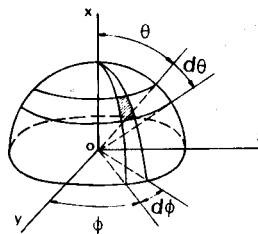


図-5 θ, φ モデル

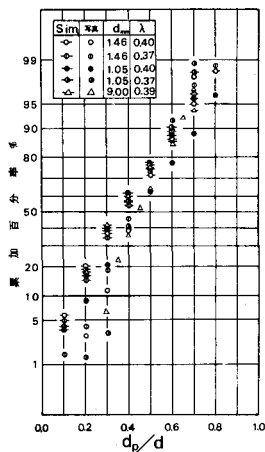


図-6 流路径要素の分布

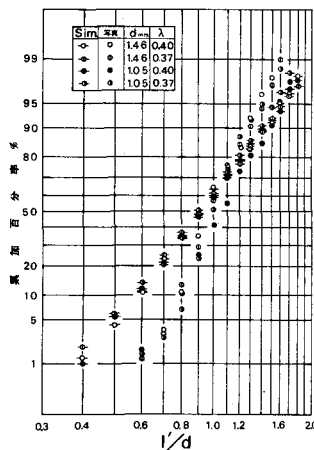


図-7 流路長要素の分布

3 浸透層内の流れの平均流速

流れの平均流速を求めるには、空隙系モデルにおいて、空隙径要素 d_{pi} および流路の方向角 (θ, φ) の分布がわかればよい。一方、流れは、Reynolds 数の値により、層流、せん移流、乱流に分けられるが、Reynolds 数がごく小さくなると、流体の空隙壁への吸着効果が著しく、流れは非ニュートン流体の流れに似た性質を示すようになる⁴⁾。これを細孔流領域における流れとよぶことにする。したがって、本研究では、浸透層内の流れをこの4つに分類し、層流、細孔流、乱流、せん移流領域での流れの順に、その平均流速について考察をすすめる。

3-1) 層流領域における平均流速

単位流路内の流れは Hagen-Poiseuille の流れであり、 α_i を単位流路が X 軸となす角度、 $\partial h / \partial x$ を X 軸方向のビエゾ水頭勾配、 A_{pi} を空隙径要素を直径とする円の断面積とし、計算の便宜上 $d_i = d_{pi} \cos \alpha_i$ 、単位流路の断面積は $A_{pi} \cos \alpha_i$ で近似できると仮定すれば、空隙率が λ のとき、断面平均流速 U は次式で与えられる。ただし、 c は、浸透層構成粒子により特性づけられる定数である。

$$U = -c \frac{\lambda \rho g}{32 \mu} \frac{\sum d_{pi}^4 \cos^4 \alpha_i}{\sum d_{pi}^2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

ただし、 Σ は浸透層の断面にわたる合計を意味し、 ρ は流体密度、 μ は粘性係数である。

したがって、断面平均流速について Darcy の法則が成り立つことを示し、その透水係数を与えたことになる。ここで、 d_p および α の生起確率密度関数を $f(d_p, \alpha)$ とすると、透水係数 K_x は次式で与えられる。(右辺の分母では、 α は単に助変数だから、 $f(d_p, \alpha)$ は d_p のみの関数と同一である)。

$$K_x = c \frac{\lambda \rho g}{32 \mu} \frac{\int \int d_p^4 \cos^4 \alpha f(d_p, \alpha) dd_p d\alpha}{\int \int d_p^2 f(d_p, \alpha) dd_p d\alpha} \quad (2)$$

つぎに、等方等質の浸透層について考察を行なう。ここで、新しく α を θ 、 θ と d_p の分布は独立とすると、 $f(d_p, \theta)$ は $f_1(\theta) \cdot f_2(d_p)$ となり、先の角度の幾何学的分布を示す式を φ について積分した値を用いると次式をうる。右辺で c を除いた値を K_s とする。

$$K = c \cdot \frac{\lambda \rho g}{160 \mu} \frac{\int d_p^4 f_2(d_p) dd_p}{\int d_p^2 f_2(d_p) dd_p} = (c \cdot K_s) \quad (3)$$

$f_2(d_p)$ の一般式は求め得ないが、シミュレーションによる d_{pi} の分布から、 K は予測可能である。

一方、浸透層が均一径 d の粒子からなるときには、空隙率が λ および浸透層の切断面における球の断面径が期待値 $\frac{\pi}{4} d$ であることから $\bar{d}_p$ が推定できる。すなわち、一辺が $\pi d / 4 (1 - \lambda)$ の正三角形において、空隙部はその面積の λ 倍であるから、 $\bar{d}_p \propto \sqrt{\lambda d / (1 - \lambda)}$ となり、(3) 式から次の Casagrande 型の透水係数式が与えられる。

$$K = n \cdot \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)^2} \frac{1}{\nu} d^2 \quad (4)$$

ただし、 n は c を含む実験定数である。

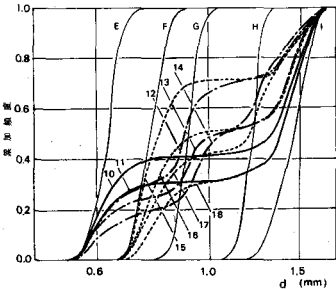


図-8 球形粒子粒度分布

RUN	$\bar{d}$	d_{90}/d_{10}	λ	K_g	K_s	$c (= K_g/K_s)$
E	0.420	1.10	0.58	0.288	0.294	0.979
F	0.774	1.15	0.58	0.585	0.429	0.894
G	0.915	1.09	0.58	0.575	0.716	0.802
H	1.200	1.08	0.58	1.03	1.10	0.938
1	1.464	1.14	0.58	1.46	1.54	0.947
10	1.12	2.41	0.556	0.466	0.605	0.775
11	1.20	2.50	0.546	0.567	0.619	0.918
12	0.98	1.65	0.561	0.500	0.551	0.901
13	1.04	2.35	0.564	0.530	0.617	0.865
14	1.12	2.00	0.546	0.596	0.565	1.054
15	0.97	1.24	0.556	0.458	0.506	0.865
16	1.11	1.90	0.551	0.551	0.562	0.980
17	1.10	1.74	0.560	0.610	0.593	1.020
18	1.25	1.89	0.568	0.749	0.832	0.901
平均						0.917

表-1 透水係数 (ガラス球)

表-1は、図-8の球形ガラス粒子について、実験による透水係数 K_E とシミュレーションによる K_S および c の値を示したものである。砂についての実験、(4)式の n についての実験およびDonat⁵⁾の浸透層における値から定めた c 、 n を表-2に示した。

	球	川 砂	角ばった砂	角の鋭い砂
c	0.92	—	0.32	
n	1.8	1.1	0.80	0.35

表-2 係数 c 、 n

3-2) 細孔流における平均流速

図-9は、(3)、(4)式による K と実験による K_E の比が d_p により整理され、 d_p が一定値以下では、流れを層流とする解析は不十分となることを示す(①は藤崎⁶⁾、②は室田、佐藤³⁾による実験値を用いた)。これは、空隙壁がイオン化した水分子を吸着し、その結果(i)流路が減少(ii)みかけの粘性が増大することによるとされている。しかし、 K_E と K がオーダーを異にすることの説明は、(i)、(ii)だけでは困難である。ここでは、空隙系モデルで、 d_p の小さいものが(i)、(ii)により流れに対して無効となれば、それに連なる流路にも無効となるものが発生すると予想されることを述べるにとどめる。

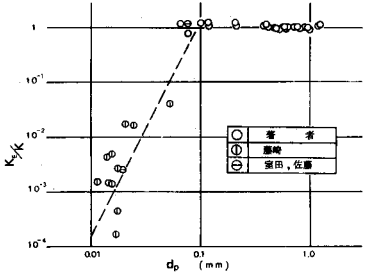


図-9 流路要素と透水係数

3-3) 乱流領域における平均流速

完全な乱流では、流れの粘性による影響は無視され、管路内の流れの運動量保存則およびDarcy-Weisbachによる摩擦損失係数 f を用いると、単位流路における平均流速は次式で与えられる($c_f \propto 1/\sqrt{f}$ となる実験定数)。

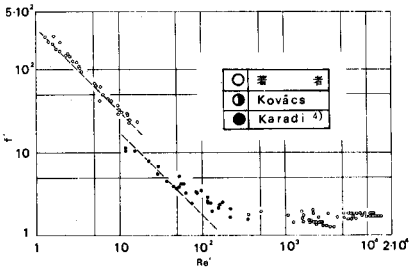


図-10 摩擦損失係数

$$U_i = c_f \sqrt{2g} \cdot d_p i^{0.5} \left| \frac{\partial h}{\partial X} \right|_i \quad (5)$$

したがって、層流域における(1)、(3)、(4)式に対応し次式をうる。

Run	d mm	d_w/d_{15}	λ	K_E cm^2/s	R_E	h_f	c_f
1	18.4	1.06	0.575	124	2000~2700	25.0	5.88
2	18.4	1.06	0.583	139	3000~3800	26.6	5.56
3	30.4	1.05	0.595	165	4500~7000	24.6	2.95
4	58.5	1.09	0.475	246	5000~10000	22.8	2.96
5	58.5	1.09	0.520	28.6	6000~14000	23.1	2.91
平均						24.4	5.05

表-3 乱流域の透水係数(磁器球)

$$U = K_t \left| \frac{\partial h}{\partial X} \right|^{0.5} \quad (6)$$

$$K_t = c_f \cdot \frac{\sqrt{2g} \lambda}{3} \frac{\int f d_p^{2.5} f_2(d_p) dd_p}{\int f d_p^2 f_2(d_p) dd_p} \quad (7)$$

$$K_t = n_f \cdot \lambda^{1.25} (1-\lambda)^{-0.5} d^{0.5} \quad (8)$$

図-10、表3、4、5は実験結果で、 R_E' 、 f' は空隙内実流速、流れの代表長に d_p を用いた値であり、*は建設省土木研究所⁷⁾による値である。

3-4) せん移流領域における平均流速

図-10は、 R_E' の範囲で流れがせん移状態になることを示す。上の層流、乱流にならって、単位流路内の流速を次式で仮定する。 $U_i = a_i \left| \frac{\partial h}{\partial \ell} \right|^s$ 、 $0.5 < s < 1.0$

	球	砕 石
C_f	3.1	1.7
n_f	2.4	1.4

表-5 係数 C_f 、 n_f

しかし、ここでは、 a_i 、 s が空隙特性、 R_E の関数であると予想されることを述べるにとどめる。

4 浸透層内の流れの分散機構⁸⁾

混合可能な流体の浸透層内における拡散は、主に、流体が複雑な空隙系を流過することによる分散にもとづき、空隙系特性、流速に支配される。したがって、本節では、その分散パターン（例えば、淡水中での塩水の分散）を乱数モデルによりシミュレートし、つぎに、分散物質（分散要素とよぶ）の運動をマルコフ過程とすれば、その濃度分布が拡散方程式で表わされることを示し、分散係数の推定を試みる。ただし、ここでは、層流領域についての考察だけにとどめる。

4-1) 乱数モデルによる分散パターン

空隙空間において、 z 方向に一様な $x=0$, $y=0$ の流入源からの分散要素について考えれば、流れは2次元問題 ($x-y$ 平面) となる。図-11は、流れの場を単位空間に分けたもので、分散要素の単位時間毎の位置を記入していけばその分散パターンが得られる。

空隙系モデルにおいて、分散要素が通過する流路 ($d_{pi}, \ell_i, \theta_i, \varphi_i$) を選ぶのは、その流路への流量 $[q_i = -c(\pi \cdot \lambda \rho g / 32 \mu) \cdot d_{pi}^4 \cos^4 \theta_i (\partial h / \partial x)]$ に比例すると仮定する。したがって、一様乱数 R より、単位流路が定められる。

図-11 単位空間

d_{pi} : 先に求められた d_p のシミュレーション結果から、 $d_{p1} \geq d_{p2} \geq \dots \geq d_{pM}$ とする。そこで、

$$D4(m) \leq R \cdot D4(M) < D4(m+1) \quad \text{を満足}$$

する d_{pm} を d_{pi} とすればよい。ただし、

$$D4(m) = \sum_{i=1}^m d_{pi}^4 \quad \text{である。}$$

ℓ_i : 任意に並べられた N 個の ℓ' から $i = [N \cdot R]$

($[]$ はガウス記号) となる i 番目の ℓ' から

$\ell_i = C_e \cdot \ell'$ とすればよい。

θ_i, φ_i : $\theta_i = \cos^{-1} R^{0.2}$, $\varphi = 2\pi \cdot R$

(上に用いた乱数 R はそれぞれ異なる乱数の値である。)

図-12は数値計算例で、 $d = 0.096 \text{ cm}$, $DX = 0.0584 \text{ cm}$, $DY = 0.2 \cdot DX$, $U = 0.0740 \text{ cm/s}$, $\lambda = 0.36$, $C_e = 0.5$, 単位時間当りの分散要素の流入数 400 個について 200 秒間の分散を示す。

4-2) 分散モデルと拡散方程式

ピエゾ水頭 h は x だけの関数とし、分散要素が時刻 t に位置 (x, y) にある条件付確率は、その前の時刻 $t - \Delta t$ にあった位置 $\{x' (=x - \Delta x), y' (=y - \Delta y)\}$ と Δt に従うとすると、マルコフ過程と考えられよう。

マルコフ過程のせん移確率を $p(x-x', y-y')$

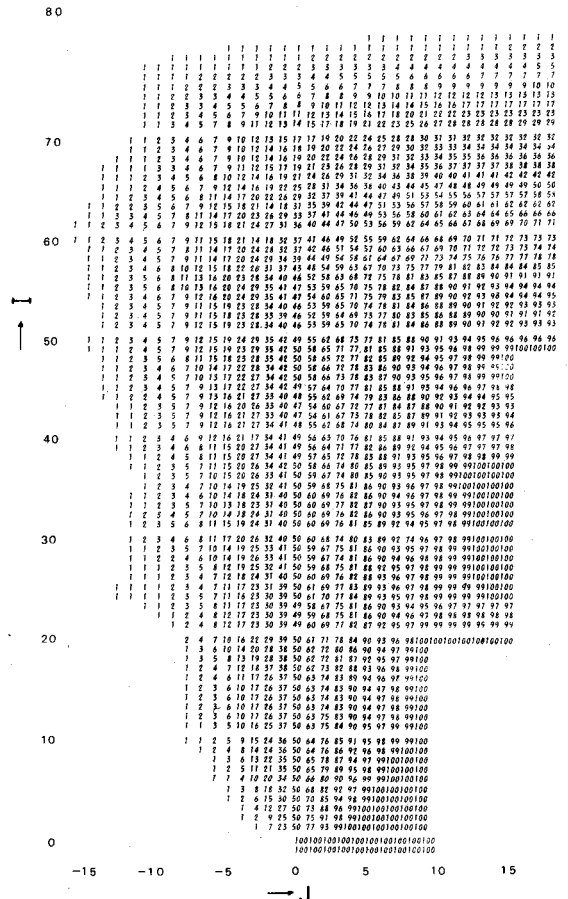


図-12 分散パターン(右の空白部は右端の値に同じ)

$t-t'$) で表わすと、次式が成り立つ?

$$p(x,y,t+\Delta t)=\iint p(x-\Delta x,y-\Delta y,t)p(\Delta x,\Delta y,\Delta t)d\Delta x d\Delta y$$

ここで、積分は $\Delta x,\Delta y$ のすべて $\mathbb{R}$ について行なわれ、 p について $\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\Delta t}, \langle (\Delta y)^2 \rangle_{\Delta t}, \frac{\partial p}{\partial t}$ 、空間についての2階の偏微分の存在を仮定し、 $\langle \Delta y \rangle_{\Delta t} \div 0, \langle \Delta x \Delta y \rangle_{\Delta t} \ll \langle (\Delta x)^2 \rangle_{\Delta t}, \langle (\Delta y)^2 \rangle_{\Delta t}$ であることに注意し、次式を用いると、 p についての拡散式をうる。

$\langle \Delta x \rangle_{\Delta t} = m \Delta t, \langle (\Delta x)^2 \rangle_{\Delta t} - \langle \Delta x \rangle_{\Delta t}^2 = \sigma_{\Delta x}^2 \Delta t, \langle (\Delta y)^2 \rangle_{\Delta t} - \langle \Delta y \rangle_{\Delta t}^2 = \sigma_{\Delta y}^2 \Delta t$

ただし、 $\langle \rangle_{\Delta t}$ は、 Δt に関する平均を示す。

p は1つの分散要素のせん移確率であるが、局所的な意味での平均水理量について考えると、 p を濃度 S 、 m を実平均流速 U とでき、 $\frac{1}{2} \sigma_{\Delta x}^2$ を D_1 、 $\frac{1}{2} \sigma_{\Delta y}^2$ を D_2 とすると、つぎの拡散方程式をえる。

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \tag{9}$$

4-3) 分散係数のシミュレーション

同一の水理条件の下での分散パターン (cf. 図-12) および拡散方程式(9)式の解から、分散係数 D_1, D_2 が推定される。この方法による計算値を D_s 、実験による値を D_E とする。(実験値はすべて,Harleman^{10), 11)}らによる値である)。図-9は、横方向分散係数 D_{2S} を C_e について示したもので、 $C_e=0.5$ とすれば、 D_E と D_s は、ほぼ一致することがわかる。 D_{1S} も C_e の増加により大きくなるが、その傾向を明らかにするには至らず、 $C_e=0.5$ について求められた値が表-1に示されている。

この結果、 D_S は、通常求められている分散係数 D_E の精度をほぼ満足するといえよう。

5 あとがき

浸透層内の流れは、その微視的な運動の確率モデルによる表現が非常に有効な現象であり、この種の解析法により水理現象の研究を発展させうる有望な分野の一つといえよう。

参考文献

1) 吉田昭治：浸透流の基礎方程式，農業土木研究別冊1号，1960。
2) 岩佐義朗，武内等：多孔性媒体の透水係数について，第24回土木学会年次講演会，昭和44年。
3) 室田明，佐藤邦明：空間規模の分布による透水係数の評価について，第13回水理講演会，1969。
4) Karadi, G. and Nagy, I. V.: Investigation into the Validity of the Linear Seepage Law, Proc. of 9th I. A. E. R. Dubrovnik, 1961.
5) Donat, J.: Ein Beitrag zur Durchlässigkeit der Sand, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Hett 17, September 1929.
6) 藤崎忠俊：土の透水性に関する研究，京都大学工学修士論文，1969。
7) 土木研究所資料第442号，有明海締切堤防調査報告書，建設省土木研究所，1969。
8) 岩佐義朗，武内等：浸透層内の流れの分散機構について，第25回土木学会年次講演会，昭和45年。
9) 寺本英：マルコフ過程と力学過程，新物理学進歩シリーズ2，棋書店，1961。
10) D. R. F. Harleman and R. R. Rumer: Longitudinal and Lateral Dispersion in an Isotropic Porous Media, Jour. Fluid Mechanics Part 3 Vol. 16, July 1963.
11) D. R. F. Harleman, P. F. Merlhorn and R. R. Rumer: Dispersion-Permeability Correlation in Porous Media, Proc. A.S.C.E. Hy. 2, March 1963.

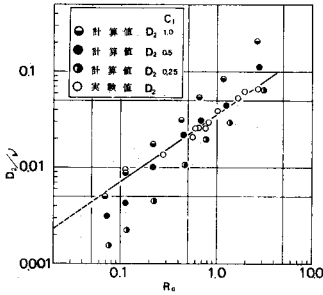


図-9 横方向分散係数

Run	U cm/s	Re	C1	D1/v	D2/v	備考
1-B	0.0189	0.0730	0.5	0.0556	0.00312	* 計
2-B	0.0557	0.216	0.5	0.239	0.01004	* 算
3-B	0.176	0.683	0.5	1.176	0.0306	** 算
4-B	0.0493	0.451	0.5	0.349	0.0218	** 算
5-B	0.134	1.23	0.5	1.747	0.0456	** 算
6-B	0.0118	0.113	0.5	0.0738	0.00435	** 算
7-B	0.0832	0.794	0.5	0.901	0.0280	** 算
8-B	0.291	2.77	0.5	6.67	0.1172	** 算
70	0.0148	0.0607		0.0208		* 実
71	0.0304	0.125		0.06		* 実
67	0.0406	0.167		0.0752		* 実
69	0.122	0.505		0.28		* 実
38	0.0532	0.81		0.555		* 算
36	0.144	2.17		1.58		* 算
5-L	0.0116	0.111			0.00925	
2-L	0.0802	0.769			0.0256	
11-L	0.284	2.72			0.0656	

* $d=0.039$, $\lambda=0.36$, ** $0.092, 0.37$, $\mu=0.096, 0.37$

表-6 分散係数