洪水予測における同定問題と適応制御について

東京工業大学　工学部　日　野　幹　雄

要旨：　流出系は，降雨を入力・流出量を出力とする応答系で，1階あるいは2階の非線型常微分方程式で記述できる。この方程式に含まれる係数や指数を，流出量の計算値と実測値の差の二乗和を最小にするという変分問題に帰着させ，これをDynamic Programmingの方法により解き，数回の試行後の収束値として，最適な係数あるいは指数を決定した。さらに，この方法を水資源系に組み入れて適応制御を行うことについて付云した。

1.　序　論

洪水予測の問題は，次のようないくつかの問題点より成り立っている。

(1)　降雨予測

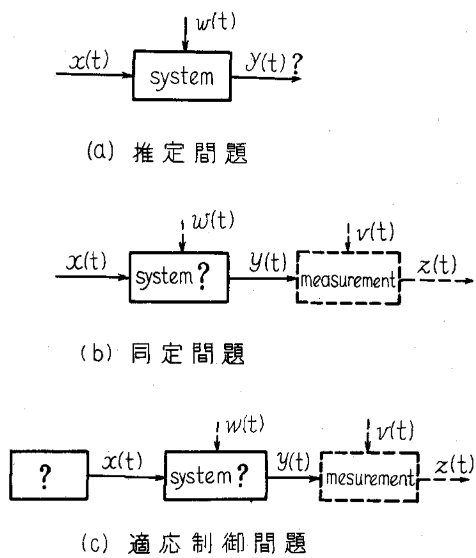
(2)　流出系のパラメーター特性の推定 ── 同定問題

(3)　流出量の最適予測

(4)　流出系の適応制御

洪水予測に関連するこれらの問題のうち，最も基本的なものは流出系へのインプットである降雨の予測である。これについては，いろいろ試みられているが，未だ信頼しうる予測方法は確立されておらず将来の研究にまたなければならない。

つぎに，流域を一つの応答系と考える立場から見ると，流域の特性は年により季節により，またその他の水文学的因子（ＡＰＩなど）により異っている。つまり，降雨を入力とし流出量を出力とする流出系は，一つの(非)線型常微分方程式で記述できるとして，この方程式に含まれる係数や指数は不確定的に変化すると考えなければならない。この係数や指数を一洪水中でも時間的に変化すると考える方法もあろうが，むしろ問題を難しくするので，本論文では一洪水中の係数は時間的に不変と考える。このように，応答系の特性パラメーターの値を推定することを，システム・パラメーターの"同定問題(Identification)" と呼んでいる。



図－1　：推定・同定・適応制御問題

一方，例えシステム・パラメーターの推定ができ，（予報をも含めて）時々刻々の降雨がわかったとしても，洪水予測は正確にはできないであろう。それは，刻々の降雨観測に誤差が伴うからである。こゝに云う誤差とは，単に計測器の誤差を云うだけではなく，雨量計の配置が適当でないことや，流域での降雨分布の片寄り，雨域の移動の

ために雨量計記録が正しく流域雨量を代表していない場合も指している。こゝに，入力の誤差の統計的性質が明らかな場合の流出予測── 最適予測 (**Optimal Prediction**)の問題がある。

さて，われわれは以上の諸問題を解決し流出予測を正確に行なえば，それで良いという状況にはない。われわれに与えられた水資源は有限であり，しかも水需用は年々増大する。そこで，貯水池・堰・用水路等を造り，流出系におけるシステム制御を可能にし，水資源の最良の利用を計らなければならない。こゝに，水資源系の適応制御 (Adaptic control or Learning control)の問題が生じる。

2. 流出系の同定問題の変分問題への帰着とＤＰによる解法

R. Bellman の創始した Dynamic Programming[1] の手法は，一般には多段決定・多元配分問題に関する計画手法ととられている向きがある。しかし，ＤＰはたゞ単に計画手法に止らず，他の工学・数理物理の分野にも根元的関連をもっている。変分法とＤＰの手法は，ＤＰの基礎原理の上から最も深いかゝわりをもつものである。

いま，y を流出量，u を降雨，w をパラメーターとし，流出系が

$$\frac{dy}{dt}=h(y;u,w) \quad , \quad y(0)=c \tag{1}$$

で記述されるものとする。パラメーター w は定数でなければならないが，いま仮にこれを時間変化量と考えれば，これは一種の流出系の制御操作量と云える。このように考えると，流出系のシステム・パラメーターの同定問題は，流出量の式(1)による予測値 $y(t)$ と実測値 $y_0(t)$との差の２乗の積分

$$J(w)=\int_0^T g(y,w)\,dt \tag{2}$$

（こゝに，$g(y,w)$ は評価関数で，いまの場合には式(3)となる。）

$$g(y,w)=[\,y(t)-y_0(t)\,]^2 \tag{3}$$

を最小にすべく，操作量 $w(t)$を制限範囲

$$w_e \leq w(t) \leq w_u \tag{4}$$

の区間内で決定する問題となる。さて，式(2)の最小値を

$$f(c,T)=\underset{w}{Min}\int_0^T g(y,w)\,dt \tag{5}$$

と書き，また時間を有限区間 Δt ごとに区切れば，最適性原理[1]の適用により，式(5)を解くことは次式(6)の漸化式で示される関数方程式を解くことに帰着する。

$$f_{N+1}(c)=\underset{w}{Min}\left[\,g(c,w)\Delta t+f_N(c+h(c,w)\Delta t)\,\right] \tag{6}$$

こうして $N(=T/\Delta t)$ 段プロセスとして $w(t)$が求まると，変化範囲（式(4)）を狭くして再び同一の方法を繰り返えして，収束値として定数 w_* を決定すれば良い。

Labadie & Dracup[3] は，quasi−linearizationの手法と最小二乗法によりシステム・パラメーターを始めから一定として順次に最適値を探す方法を発表している。著者の方法とこの方法を比較すれば，計算手順の点でＤＰの方法の方が楽であると思われる。（詳細は文献 2）

3. 貯留関数法で記述される流出系の場合

流域への降雨を$I(t)$，流域からの流出を$Q(t)$，流域内の貯留を$S(t)$とすれば，連続の条件より

$$\frac{dS}{dt}=I(t)-Q(t) \tag{7}$$

もし，貯留量SがQの関数として，

$$S=KQ^{m} \tag{8}$$

で表わされるとすれば，流出系に関する微分方程式は，式(9)となる。

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{Q^{1-m}}{Km}(I-Q) \tag{9}$$

流出系の同定問題は，降雨$I(t)$ と流出$Q(t)$ とから，パラメーターKとmあるいはKm と($1-m$)の値を推定することである。先にも述べたように，一応これらの定数をtime variantとして取扱い，$K(t)$，$m(t)$と書き，数回の試行後の収束値として定数K_*, m_*を決定する。

さて，時刻$t=n\Delta t$ より後進的に洪水をトレースしてみる。時刻($n-1$)ΔtとnΔt の間のシステム・パラメーターを

$$\begin{aligned} X_n&=\{K(n)m(n)\}^{-1} \\ W_n&=1-m(n) \end{aligned} \tag{10}$$

と置くと，$t=(n-1)\Delta t$での流出量は式(9)より次のようになる。

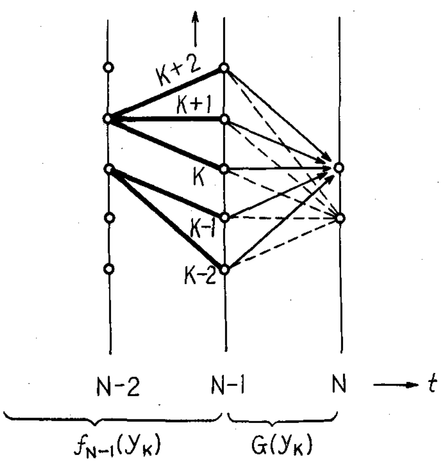
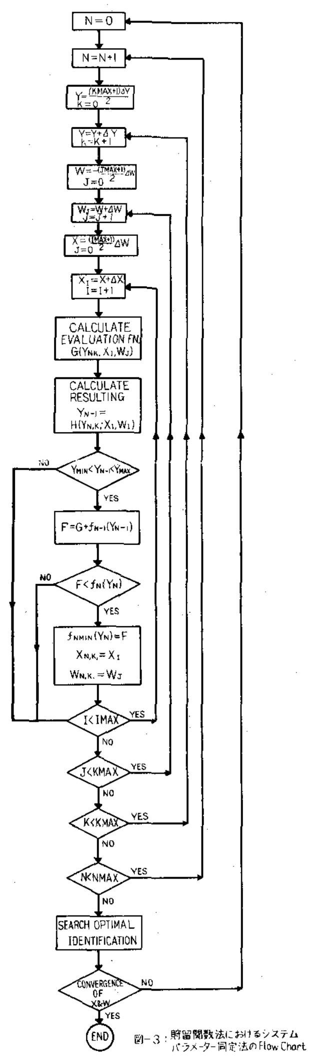


図-2：DPによる変分法の解法(N~2)~(N-1)の間の太い線は,((N-1)段プロセスとしての最適解)



図－3： 貯留関数法の場合の同定問題のフロー・チャート．

$$Q_{n-1} = Q_n + X_n Q_n^{W_n} \{ Q_n - I_n \} \Delta t \tag{11}$$

先に **2.** で述べた一般論を少し変更して，$t=(n-1)\Delta t$ での実測 O_{n-1} と計算 Q_{n-1} の差を Y_{n-1}

$$Y_{n-1} = Q_{n-1} - O_{n-1} \tag{12}$$

と定義する。こうした方が汎用性のある同定問題のプログラムが作成できるからである。したがって，

$$\begin{aligned} Y_{n-1} &= Y_n + X_n \cdot (Y_n + O_n)^{W_n} \cdot (Y_n + O_n - I_n)\Delta t + (O_n - O_{n-1}) \\ &= h(Y_n ; X_n , W_n ; n) \end{aligned} \tag{13}$$

上式は，$(n-1)\Delta t$ における状態量 Y_{n-1} が，$n\Delta t$ における状態量 Y_n と制御可能な操作量 X_n W_n とで決定されることを示している。したがって，流出系を貯留関数法で記述する場合の同定問題は，次のように，変分問題に帰着できる。

1 ）ある state Y_n について，opthnal decision $X_n \cdot W_n$ が行なわれると，

2 ） resulting state Y_{n-1} が決り，

3 ）この state Y_{n-1} より始まる（$n-1$）stepでの optimal decision が行われ，state Y_{n-2} が生じる。

4 ）$n=1 \sim N$ の間でこのような連続決定が行われるとき，予測誤差

$$J = \int_0^T Y^2 (t) dt$$

を最小にする。

これは，前述のＤＰ手法により式(14)の関数方程式を解くことに相当する。

$$f_N(Y) = \underset{\substack{|X-X| \leq \sigma_x \\ |W-W| \leq \sigma_w}}{Min} \left[G(Y;X,W) + f_{N-1} \{ H(Y;X,W) \} \right]$$

こゝに，Y ：step Ｎの状態量，$f_N(Y)$ ：状態 Y より始まるＮ段プロセスの最小値，$G(Y;X,W)$ ：評価関数，こゝでは $G(Y;X,W)=Y^2$ ，$H(Y;X,W)=Y_{N-1}$ ，操作量 X_N，W_N の決定より生じる（$n-1$）step の状態，式(13)。　式(14)の計算を行うためのフロー・チャートを図－３に示す。

4.　修正貯留関数法の場合

流出系を式(8)のような単純な関係で表すのはかなり無理である。Prasad[4]（１９６７）は，式(8)を修正して

$$S(t) = K_1 Q^m + K_2 \frac{dQ}{dt} \tag{15}$$

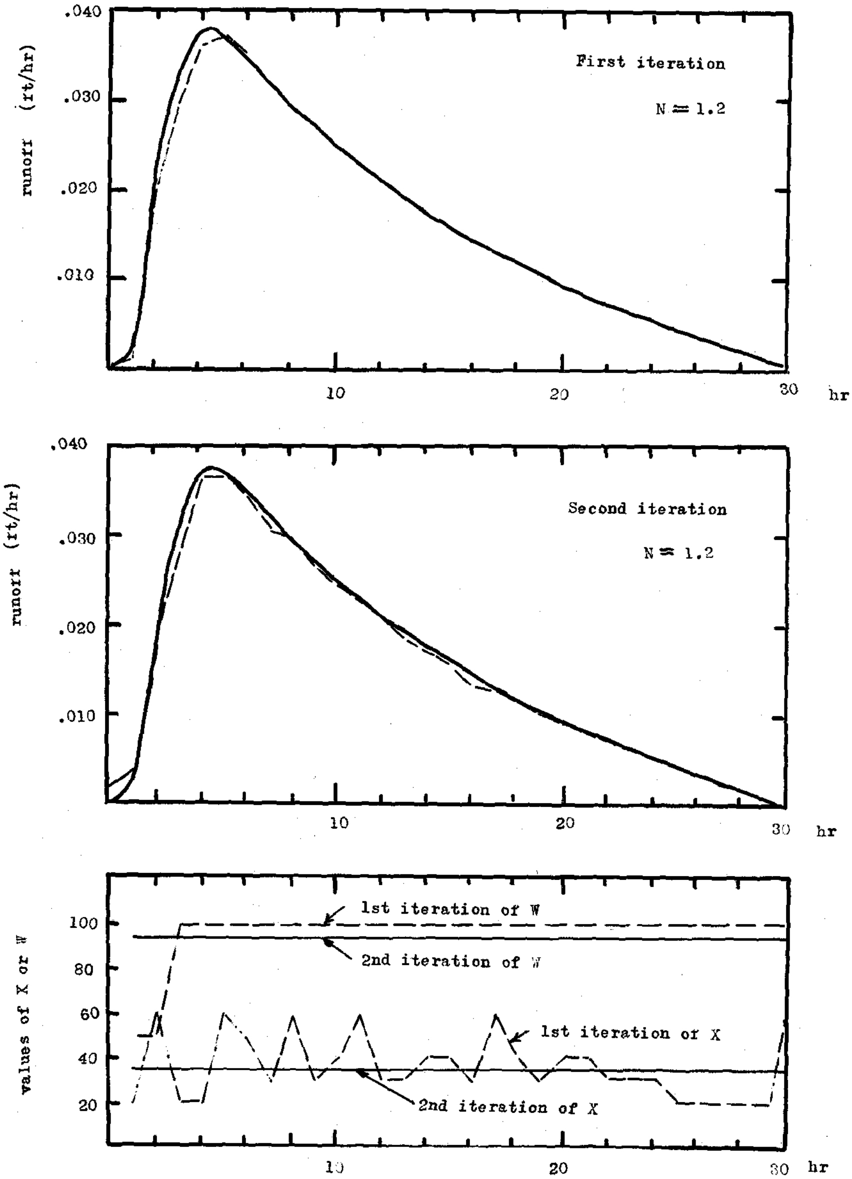
で表わした。したがって，式(7)は

$$K_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + K_1 m Q^{m-1} \frac{dQ}{dt} + Q = I \tag{16}$$

のような，非線型の二階常微分方程式で表わされる。これを次のような一階の常微分方程式に書き直す。

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= P \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{K_1 m}{K_2} Q^{(m-1)} \cdot P - \frac{1}{K_2} Q + \frac{1}{K_2} I \end{aligned} \tag{17}$$

したがって，ＤＰの問題としては，２つの状態量（ P ，Q ）に対し，３つの操作量（ K_1 ，K_2 ，m）の最適値を求める問題となる。ＤＰの手法は１変数・１決定量の多段決定過程では威力を発揮するが，状態量や決定量が多くなると効果は少くなる。そこで，こゝでは m を既知量とし，K_1 ・K_2 の最適


.040
.030
.020
.010
runoff (ft/hr)
First iteration
N = 1.2
10
20
30
hr
.040
.030
.020
.010
runoff (ft/hr)
Second iteration
N = 1.2
10
20
30
hr
100
80
60
40
20
values of X or W
1st iteration of W
2nd iteration of W
1st iteration of X
2nd iteration of X
10
20
30
hr

図－４：　計算例

値を決定することにする。詳細は文献２）にゆずり，結果の関数方程式を書くと，次のようになる。

$$f_N(Y,Z)=\underset{\substack{X\\W}}{Min}\left[G(Y,Z;X,W)+f_{N-1}\{H_1(Y,Z;X,W),H_2(Y,Z;X,W)\}\right] \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&G(Y,Z;X,W)=Y^2\\
&H_1(Y,Z;X,W)=Y_N-Z_N(\Delta t/2)-Z_{N-1}(\Delta t/2)\\
&H_2(Y,Z;X,W)=Z_N+\{X_N\cdot(Y_N+O_N)^{m-1}\cdot(Z_N+\dot{O}_N)+W_N(Y_N+O_N-I_N)\}\Delta t\\
&\qquad+(\dot{O}_N-\dot{O}_{N-1})\\
&X_N=K_1 m/K_2, \quad Y_N=Q_N-O_N\\
&W_N=1/K_1, \quad Z_N=P_N-\dot{O}_N
\end{aligned} \tag{19}$$

5. 適応制御問題について

上の節では，一つの洪水が終ってからのこととして考え取扱って来たが，時間TやステップNは洪水の途中であるとみなしても何んらおかしくない。これまで行われて来た洪水予測の方法では，（やゝ信頼度において欠ける）降雨量情報のみを用いて，流出量の時々刻々の実測と予測と差という最も信頼度の高い情報を活用していない。それゆえ，洪水の上昇初期に上述の同定を行えば，その時点までの降雨による今後の流量と時刻の関係をかなり正確に見積ることができる。さらに降雨量の誤差補正を行うことも，上述の方法の延長として可能である。したがって，流出観測がダム地点であるとすれば，このような洪水による被害を最小にし，しかも発電や貯水といった貯水池の利用面における利益の低下を最小にするようなダム・ゲートの操作を行うことが，同様にＤＰにより可能である。１時間ごとに予測と実測流出量の比較を行い，あらためてシステム・パラメーターの同定および降雨量補正を行い，ゲート操作を修正する。こうした適応制御の方式によりダム操作をより信頼性の高いものとすることができる。ＤＰの手法は，複雑な問題を極めて単純な問題解法に帰着させるものであり，プログラムも汎用性が高くかつ，中小型の電子計算機で上述の同定問題・適応制御問題の解が得られることを考えれば，この手法は今後ますます発展の可能性をもっていると云えよう。

参考文献

1）Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton University Press, (1957)

2）日野　幹雄　：　情報理論的水文学への序説(V)－　流出予測における同定問題のＤＰによる解法，東京工業大学・土木工学科・研究報告　No.9, Dec.（1970）

3）Labadie, J.W.& Dracup, J.A.：Optimal identification of lumped watershed model, Water Res.Res., vol.5, no.3（1969）

4）Prasad, R.: A nonlinear hydrologic system response model, J.Hydr. Div., Proc. ASCE, vol.93, no. HY4（1967）