

降雨流出系のシステム関数の解析について

北海道大学工学部 正員 藤 田 睦 博

要旨；前報において、降雨量を入力、流出量を出力と考えるとき、入出力間の周波数伝達関数（システム関数）のベクトル軌跡（ナイキスト図）は、系のモデル作成上有効な情報を与えることを明らかにした。こゝでは更に周波数伝達関数の数値計算上の問題点、得られたシステム関数の評価について吟味する。こゝで扱う降雨流出系は、洪水流出を対象とし流出期間が短かく入出力間の無相関な雑音の消去が困難な系である。

1 システム関数

降雨流出系において、ゼロ初期条件、線形性、不変性、因果性の一連の仮定を満足するものとする。有効雨量を $R(t)$ 、直接流出量を $Q(t)$ とすると、常に次式が成立している。

$$Q(t) = \int R(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1.1)$$

$h(t)$: impulse response

$$(1.1) \text{式より} \quad H(\omega) = \frac{Q(\omega)}{R(\omega)} \quad (1.2)$$

こゝに $H(\omega)$: システム関数

$$Q(\omega) = \int_0^\infty Q(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.3)$$

$$R(\omega) = \int_0^\infty R(t) e^{-j\omega t} dt$$

j : 虚数単位

(1.2)式で求められた $H(\omega)$ は、当然因果関数の条件 ($h(t)=0, t<0$) を満足していなければならない。一般的にはこのための条件式として、Play-Wiener の条件を考えねばならない。しかしこゝで扱っている降雨流出系では、 $R(t), Q(t)$ は共に正值制限時間信号と考えられるので、より簡単な条件式として次式を考える。

$$\int_0^\infty A^2(\omega) d\omega < \infty \quad (1.4)$$

$$H(\omega) = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)}$$

この場合には、Parseval の等式より

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A^2(\omega) d\omega \quad (1.5)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)}$$

(1.5)式と正值制限時間信号の条件より、(1.4)式は成立する。

2 Fourier変換の数値計算

関数 $f(t)$ をFourier積分するための数値計算法としては、Fourier級数展開法、多項式近似法等があるが、いずれの手法を採用しても得られた $H(\omega)$ は、因果性を満足していなければならない。こゝでは、 $R(t)$ 、 $Q(t)$ の特性と $H(\omega)$ の因果性を考慮して fig. 2.1(a)、fig. 2.2(a) に示されるように $R(t)$ については矩形パルス、 $Q(t)$ については折線で近似する方法を採用した。

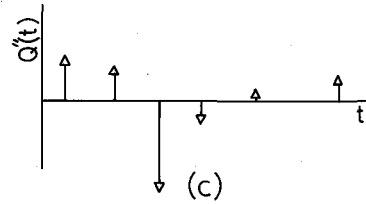
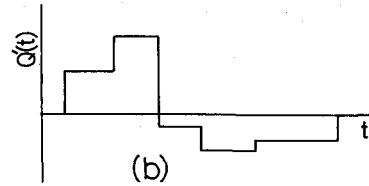
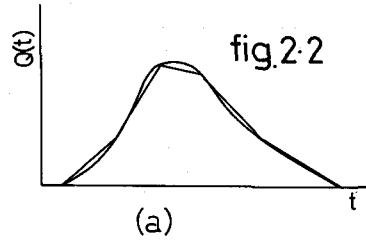
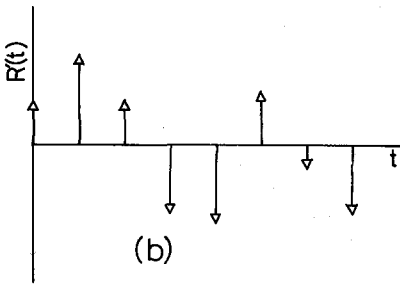
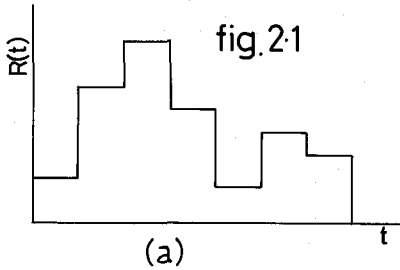


fig. 2.1、fig. 2.2 より $R(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ は

$$R(\omega) \simeq \frac{1}{j\omega} \sum K_i e^{-j\omega t_i} \quad (2.1)$$

$$Q(\omega) \simeq \frac{-1}{\omega^2} \sum K_i e^{-j\omega t_i}$$

したがって

$$H(\omega) = \frac{-1}{\omega} \frac{\sum K_i e^{-j\omega t_i}}{\sum K_i e^{-j\omega t_i}} \quad (2.2)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0$$

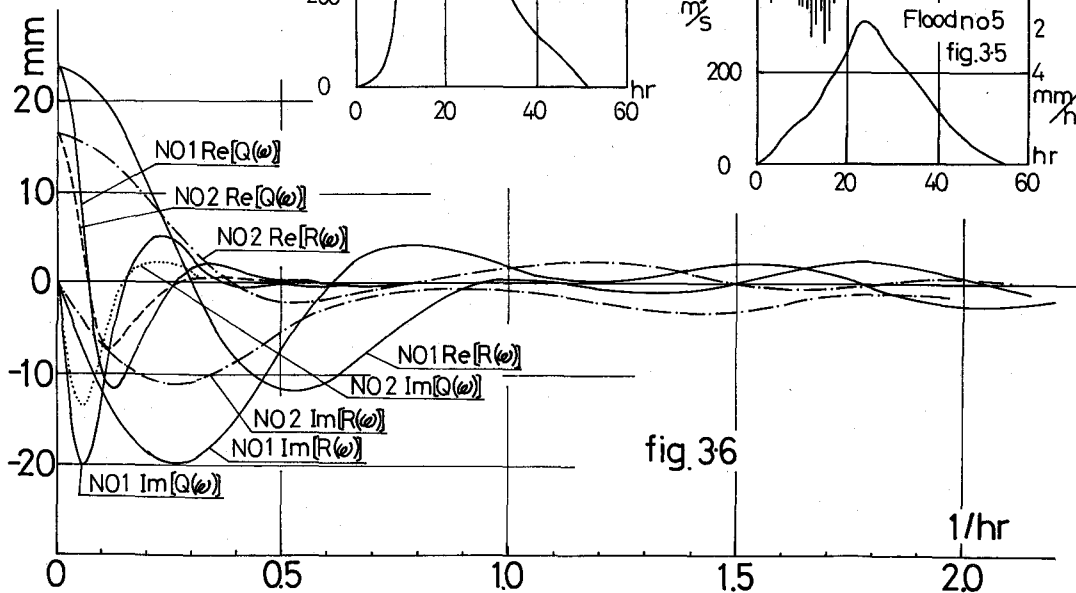
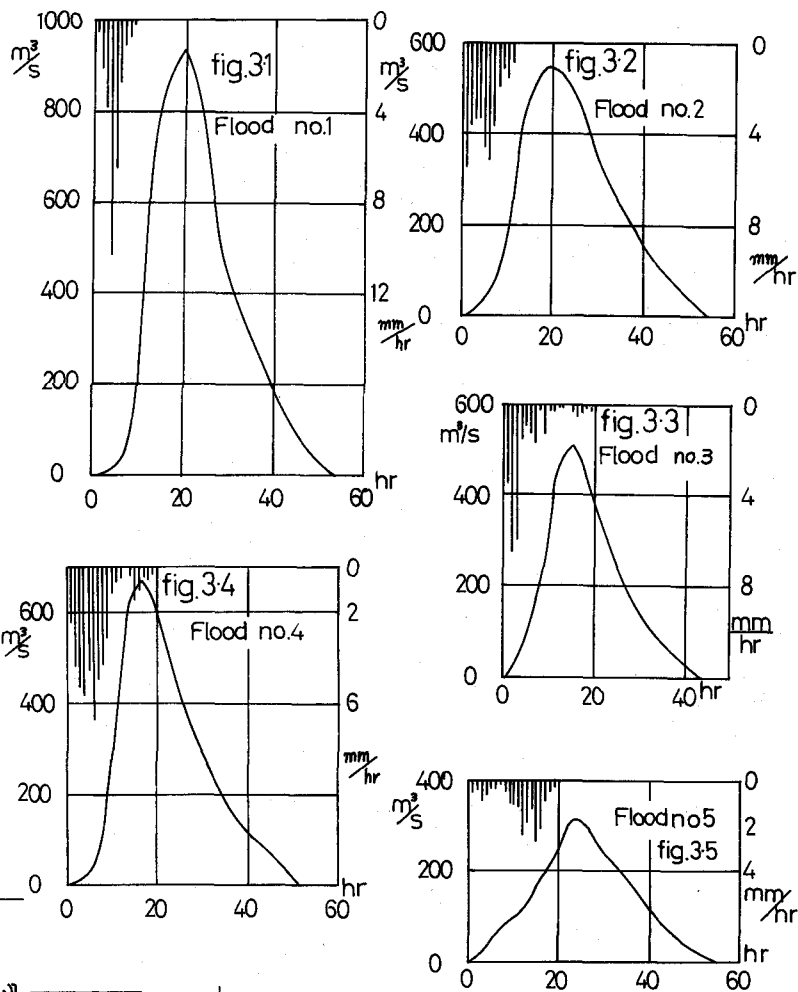
(2.3)式よりこゝで採用した数値計算法は、計算上の安定条件を満足している。

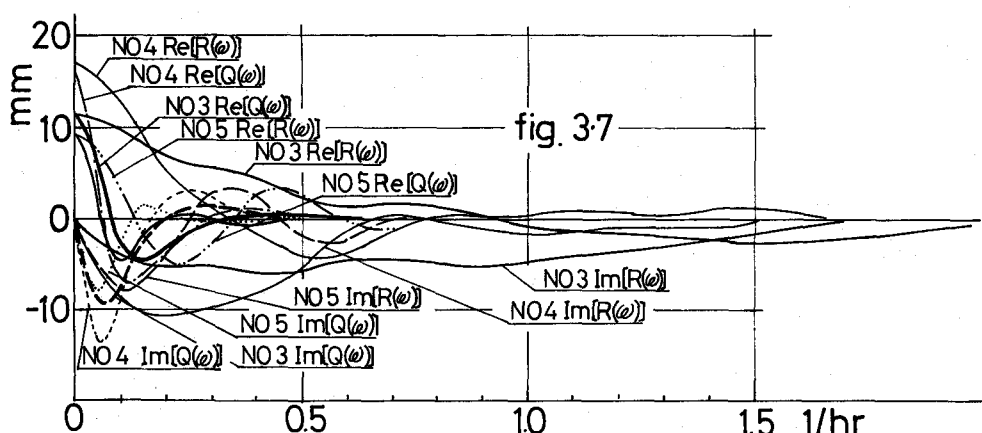
3 システム関数の計算例とその評価

天塩川上流部美深地点（流域面積 2,899 km²）における5洪水例について実測資料よりシステム関数を算出し、その評価を試みる。fig. 3.1~fig.3.5 に計算に用いたハイトグラフとハイドログラフを示す。又 fig. 3.6、3.7 に各洪水毎の $R(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ を示す。これらの図から入力 $R(t)$ は、

出力 $Q(t)$ に比較し極めて広いスペクトルを有していることがわかる。一方各洪水毎のシステム関数を fig. 3.8、3.9 に示す。ここで注目されることは、 $\omega = 0.7 \sim 1.2$ 1/hr の範囲でピークを示すことである。この現象について考察してみる。

ここで扱っている $R(t)$ $Q(t)$ には当然相互に無関係な雑音が混入している。これらの雑音は、入出力間の相互相関関数を求めることにより理論的には消去できる。しかし洪水時の流出

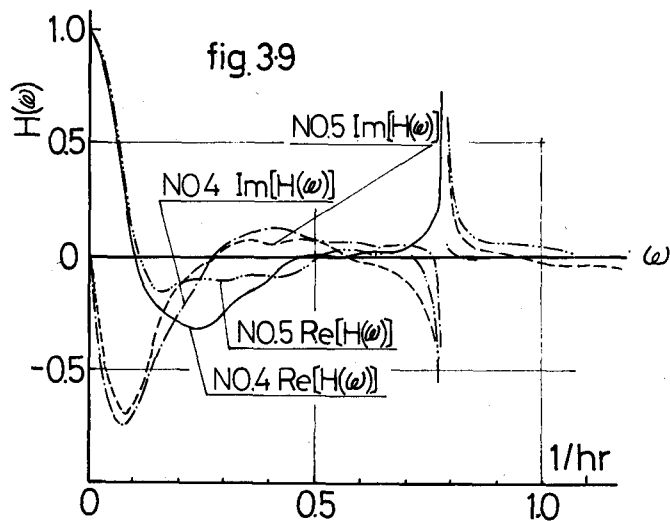
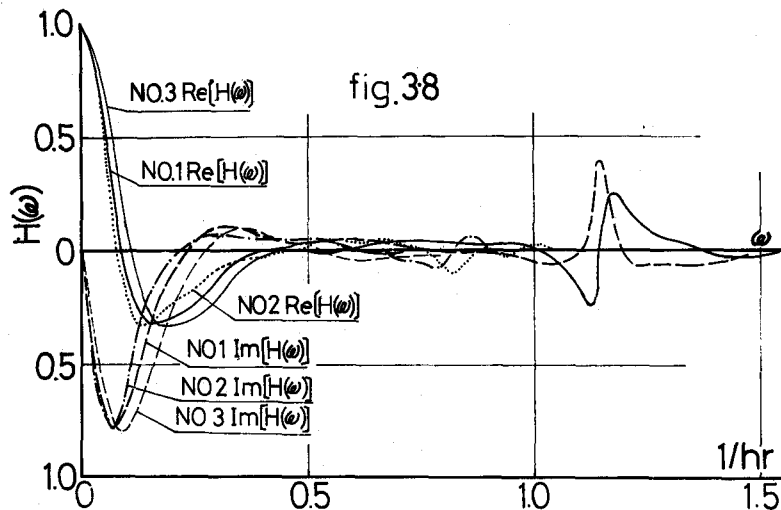
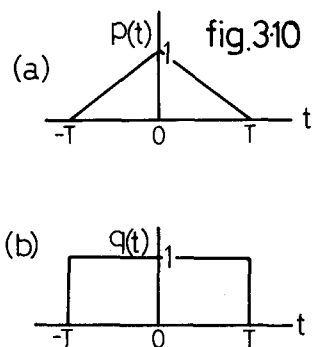




を扱う場合には、データのサンプリング間隔に比較し洪水時間が短かく、かつ入出力間の直流成分も強く、相互相関関数を計算する際の計算誤差内に消去されるべき雑音が埋没して、實際上雑音を消去できない。 $R(\omega)$ 、 $Q(\omega)$

は、各 ω 毎に積分してその値を求めるので計算は極めて安定しているが、 $H(\omega)$ を求める際 $Q(\omega)$ と $R(\omega)$ の比をとるので誤差の影響が拡大されるわけである。 $R(t)$ 、 $Q(t)$ をそれぞれ矩形パルス、折線で近似して $R(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ を求めたので、 $R(t)$ 、 $Q(t)$ に含まれる誤差を fig.3.10

(a)、(b)に示される矩形パルス p_T 、三角パルス q_T と考えると



$$P_T = U(t+T) - U(t-T) \quad (3.1)$$

$$q_T = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (3.2)$$

P_T 、 q_T を t_0 だけ移動した $P_T(t-t_0)$ 、 $q_T(t-t_0)$ の Fourier 積分は

$$F_P = \frac{2 \sin \omega T}{\omega} e^{-j\omega t_0} \quad (3.3)$$

$$F_q = \frac{4 \sin^2(\frac{\omega T}{2})}{T \omega^2} e^{-j\omega t_0} \quad (3.4)$$

F_P 、 F_q は、極めて広いスペクトルを

もち高周波領域においてこれら雑音

の影響が強く表れるものと思われる。

次に各洪水毎の $H(\omega)$ を直接比較

するために fig. 3.11 にナイキスト

図を示す。洪水 No. 5 を除いてベクトル

軌跡は $\omega = 0 \sim 0.4$ 1/hr の範囲で

かなり類似しており、流出特性は線

形性が強いと思われる。更にゲイン

と位相を個別に評価するため fig. 3.12

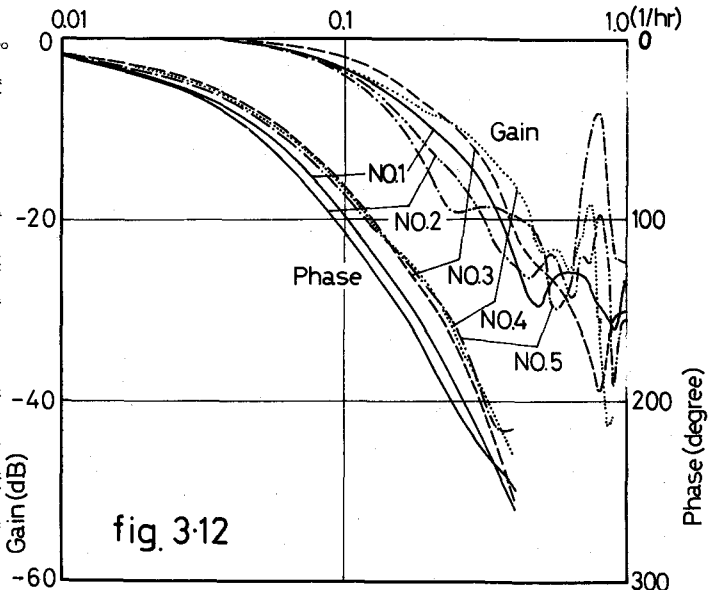
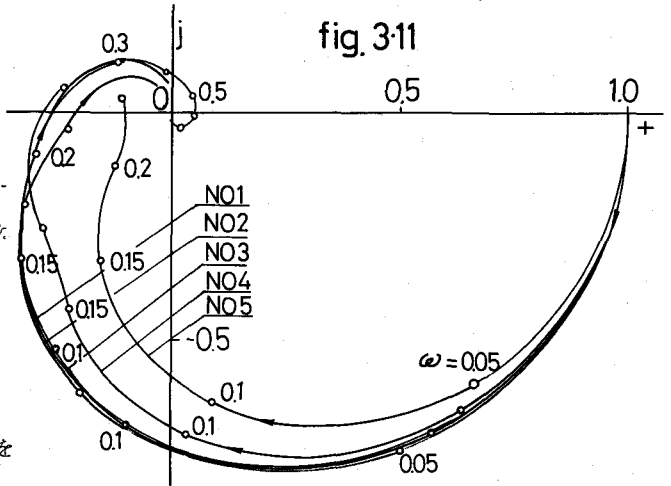
にポート線図を示す。図において洪

水 No. 5 のゲインは、他のグループに

比較して $\omega = 0.2$ 1/hr の近傍で減衰

が鈍っているが、位相に関しては特

別な差異はみられない。



洪水 No. 5 は fig. 3.5 に示されるように他の洪水に比較して規模が小さく、したがって基底流分離

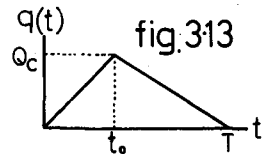
の際に含まれる相対誤差は大きいものと思われる。特に No. 5 はハイドログ

ラフが三角形に近く基底流分離の際の誤差は fig. 3.13 に示されるよう

に底が洪水継続時間に等しい三角パルスで近似できる。したがってそのス

ペクトルは

$$q(\omega) = Q_c \left\{ \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{T-t_0} \right) \frac{\cos t_0 \omega}{\omega^2} - \frac{1}{T-t_0} \frac{\cos T \omega}{\omega^2} - \frac{1}{t_0 \omega^2} \right\} \quad (3.5)$$



(3.5) 式において $T = 50 \sim 60$ hr の大きさなので、スペクトルは $\omega = 0.3 \sim 0.4$ 1/hr の近傍でほとんど減衰してしまい、低周波領域で大きな影響を与える。又 No. 5 の位相は、他のグループと大差ないので、基底流を過大に評価しているようである。

求められた $H(\omega)$ は、高周波領域になるにしたがい雑音の影響が大きくなるので、インパルス応答

を求める場合いかなる周波数でカットすべきかとい
うことが問題となる。この場合信号の継続時間とそ
のスペクトル幅の関係を知る尺度として立上り時間
 D_t を考えると

$$D_t = \frac{1}{f_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

$$D_{\omega} = \frac{1}{A_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \tag{3.6}$$

$$F(\omega) = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$f(t)$ が正值制限時間信号の場合には、 $A_{max}=A(0)$
となり又 $D_t \cdot D_{\omega} = 2\pi$ の関係がある。

table. 3.1 に入出力の D_t 、 D_{ω} を求めた結果を
示す。 $H(\omega)$ の継続幅は $Q(\omega)$ のそれと等しいと考えてもよいので、table. 3.1の D_{ω} をカットオフ
周波数として Fourier 級数展開して求めたインパルス応答を fig. 3.14 に示す。 N_5 を除いてほ
う良好な結果が得られた。

インパルス応答のみを求める場合には、 $H(\omega)$ の実数部のみが既知であればよいが、入出力の測定
誤差、データ処理上の誤差を検討する際には、ナイキスト図、ボード線図等が極めて有効な示唆を与
えることを確めた。

Table 3-1

Flood NO.	D_{rt}	$D_{r\omega}$	D_{qt}	$D_{q\omega}$
1	5.347 ^{hr}	1.175 ^{1/hr}	20.207 ^{hr}	0.311 ^{1/hr}
2	6.317	0.955	23.884	0.263
3	3.895	1.617	18.207	0.345
4	7.237	0.868	20.175	0.311
5	7.112	0.884	23.849	0.263

参考文献

- 1) 藤田睦博；水文学の一手法として周波数特性のベクトル表示Ⅰ、昭和43年度研究発表会論文集第25号、土木学会北海道支部、昭和44-2
- 2) 山岡勲、藤田睦博；ナイキスト図による河川流出モデルの適合性の判別、第13回水理講演会講演集、昭和44-2
- 3) I. Yamaoka & M. Fujita; Evaluation of Simulation Models for River Runoff through Nyquist Plots, The 13th Congress of I. A. H. R., Sep. 1969
- 4) Athanasios Papoulis; The Fourier Integral and Its Applications, McGraw-Hill Book Company, 1962

