

# C. M. W. 展開 (法) に よ る 非 線 型 流 出 の 解 析

東京工業大学工学部 正員 吉 川 秀 夫

" " 正員 日 野 幹 雄

" 大学院 学員 鋤 柄 徹

〔 序 〕

従来、降雨・流出の現象は、いわゆる水文学的方法により研究されて来たが、近年より厳密な解析が行われる気運にある。その一つとして、運動の法則、連続の法則を基に、複雑な外的条件を考慮して、(あるいは、単純化して)解いていく方法がある。

これに対して、降雨・流出の現象を従来の水文学とは異った見地から、とくに確率過程論を応用して Black Box 的に把える方法が最近進んで来た。これまでの研究においては、線型性の仮定の基に、流域の全体的特性の把握がなされて来た。<sup>1), 2), 3)</sup> Amorocho,<sup>4)</sup> Jacoby<sup>5)</sup> らは、応答系についての Wiener の非線型確率理論、を用いて、解析しようと試みを行ったが、非線型核を求めるまでには致らなかった。本研究は、Lag-Multiple-Filterにより、非線型過程の Cameron-Martin-Wiener 展開法<sup>6) 7)</sup>、における核、すなわち非線型流出核を求め流出の非線型性を把握しようとしたものである。

〔 C. M. W. 展開による流出核の算出 〕

非線型系に対する不規則入力にガウス分布の白色雑音であるとする。入力を  $x(t, \alpha)$  で表わす。ここに、 $t$  は時間を表わし、 $\alpha$  は Parameter を表わす。非線型系からの出力  $y(t, \alpha)$  は

$$y(t, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(K_m(t+\tau_1, \dots, t+\tau_m), \alpha) \quad (1)$$

で表わされる。ここに、 $G_m$  は非線型核  $K_m(\tau_1, \dots, \tau_n)$  を有す直交関数で、

$$G_m(K_m, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_m(\tau_1, \dots, \tau_n) dx(\tau_1, \alpha) \dots dx(\tau_n, \alpha) \\ - O_n^k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_{n-2}(\tau_1, \dots, \tau_{n-2}) dx(\tau, \alpha) \dots dx(\tau_{n-2}, \alpha) \quad (2)$$

として表わされる。

この未知の非線型系の流出核を求める為に、別に既知の非線型系を考える。<sup>8)</sup>

既知の非線型系に同じ入力を入れると、出力  $y_k(t, \alpha)$  は

$$y_k(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(H_n(t+\tau_1, \dots, t+\tau_n), \alpha) \quad (3)$$

となる。ここに  $H_n$  は既知の非線型系の流出核である。

$y(t, \alpha)$  と  $y_k(t, \alpha)$  との積をとり、これを  $r(t, \alpha)$  とする。

$$r(t, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_m(K_m(t+\tau_1, \dots, t+\tau_m), \alpha) \\ \times G_n(H_n(t+\tau_1, \dots, t+\tau_n), \alpha) \quad (4)$$

$G_m, G_n$  は直交関数であるから、 $m \neq n$  に対して

$$G_m(K_m, \alpha) \times G_n(H_n, \alpha) = 0 \quad (m \neq n) \quad (5)$$

が成り立つ。 $r(t, \alpha)$  の平均は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r(t, \alpha) dt \\ = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \times H_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1, \dots, d\tau_n$$

となる。

(6)

ここで既知の非線型系として、図-1、図-2の如き遅延回路を考える。<sup>9)</sup> 図-1、図-2は、それ

それ1次, 2次の遅延回路を示している。1次の遅延回路よりの出力  $y_1(t)$  , 2次の遅延回路よりの出力  $y_2(t)$  は, DiracのDelta函数を用いて, 次式の如く表わすことができる。

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \sigma_1) x(t - \tau) d\tau = x(t - \sigma_1) \quad (7)$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ = x(t - \sigma_1) \cdot x(t - \sigma_2) \quad (8)$$

1次, 2次の遅延回路を, それぞれ図-3, 図-4の如く未知の非線型系に並列にして考える。未知の非線型系からの出力  $y(t)$  と, 1次, 2次の遅延回路からの出力  $y_1(t)$  ,  $y_2(t)$  との積の平均はそれぞれ,

$$\overline{y(t) \cdot y_1(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) \cdot k \cdot \delta(\sigma_1 - \tau_1) d\tau_1 = k \cdot K_1(\sigma_1) \quad (9)$$

$$\overline{y(t) \cdot y_2(t)} = 2k^2 \cdot K_2(\sigma_1, \sigma_2) + h_0 \cdot k \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (10)$$

となる。ここに,  $h_0 = \overline{y(t)}$

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t - \sigma) d\sigma$$

そうすると, 入力と出力との相互相関, 三重相関により, 未知の系の1次の核  $K_1(\sigma_1)$  , および, 2次の核  $K_2(\sigma_1, \sigma_2)$  が求められる。

$$K_1(\sigma) = \frac{1}{k} \overline{y(t) \cdot y_1(t)} \\ = \frac{1}{k} \overline{y(t) \cdot x(t - \sigma_1)} \quad (11)$$

$$K_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2k^2} \overline{y(t) \cdot y_2(t)} \\ = \frac{1}{2k^2} \overline{y(t) \cdot x(t - \sigma_1) \cdot x(t - \sigma_2)} \quad (12)$$

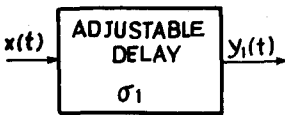


図 - 1

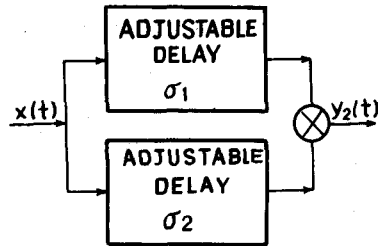


図 - 2

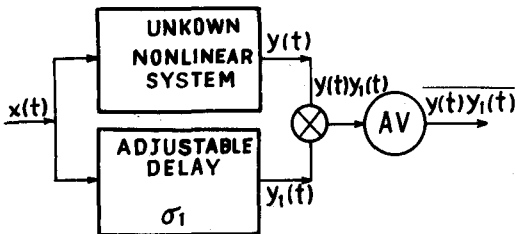


図 - 3

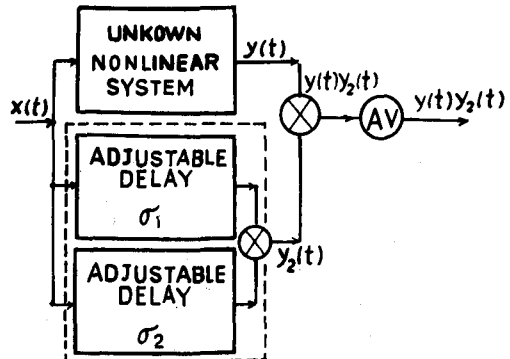


図 - 4

〔 C . M . W . 展開法の適用 〕

降雨・流出現象への C . M . W 展開を利根川支流の神流川に対して試みた。1948年から1960年に渡る資料を A グループ ( 昭 27 , 28 , 29 ) , B グループ ( 昭 30 , 31 , 32 ) , C グループ ( 昭 33 , 34 , 35 ) の三つに分けると, A グループは弱降雨型, B グループは中降雨型, C グループは強降雨型に相当している。そして, A , B , C の順に非線型性が強くなっている。ここでは非線型性の強いと思われる C グループに対して C . M . W 展開を適用した。日降雨の自己相関は図-5の如くほぼ白色雑音とみなすことができるので, 入力単位として日降雨を採用した。

1 次, 2 次の核を求める為に相互相関, 三重相関を求めた。相互相関は図-6の如く求められ, 遅れ  $\sigma = 1$  の所で peak に達しているのが分かる。三重相関は図-7の如く求められる。図-7において, 遅れ  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  の所で peak に達し, 更に  $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 10$  の所で peak の 30 % の値をとる。その他の所では, ほぼ平らであるとみなすことができる。 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  の所の peak は表面流出の非線型特性が強いことを示している。 $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 10$  の所の peak は中間流出の影響のほか, 降雨の周期性によるものも含まれていると思われる。

非線型流出予測は次式にて求められる。

$$f_o(t) = \overline{y(t)} + f_{o1}(t) + f_{o2}(t) \quad (13)$$

$$\text{ここに, } f_{o1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (14)$$

$$f_{o2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 \cdot d\tau_2 \\ - k \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \quad (15)$$

(13) 式の右辺第 2 項までの計算により, 線型予測がなされる。図-8は, C グループに対する線型予測, 図-9は非線型予測を示している。

線型予測と非線型予測の精度は, 流出の観測値  $f_d(t)$  と予測値  $f_o(t)$  との誤差  $\varepsilon_i(t)$

$$\varepsilon_i(t) = f_d(t) - f_o(t) \quad (16)$$

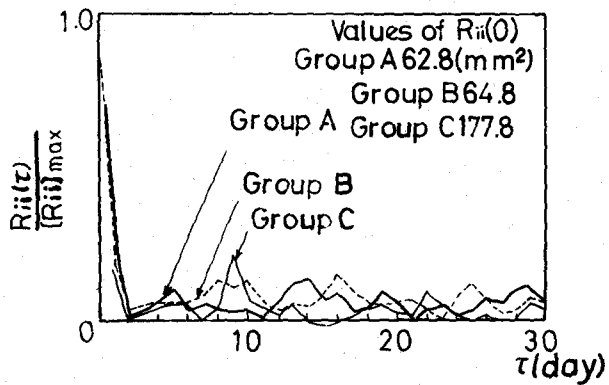
のスペクトルを比較すれば分かる。図-10は誤差のスペクトル図である。線型予測に比べ, 非線型予測の誤差が減少し, 精度が向上していることがわかる。

〔 結 論 〕

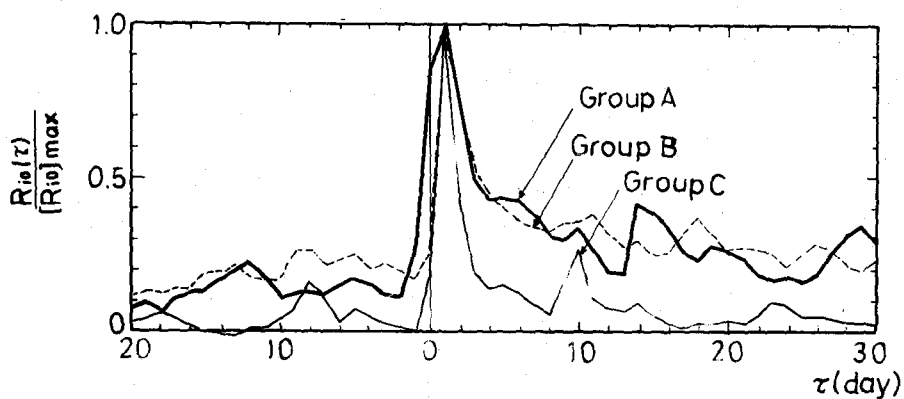
日降雨・流出系への C . M . W . 展開法の適用は, 短期流出成分が降雨に対して遅れが少なく, 非線型性が強く現われること, 長期流出成分は非線型性が弱く現われること, 更に, 強降雨に対する流出の非線型性が非常に高いこと, 等を示している。

この C . M . W . 展開法は, 実際の流出現象にみられる線型性, 並びに強降雨に対する非線型性を含み, 降雨より高精度でもって流出を予測することができる。

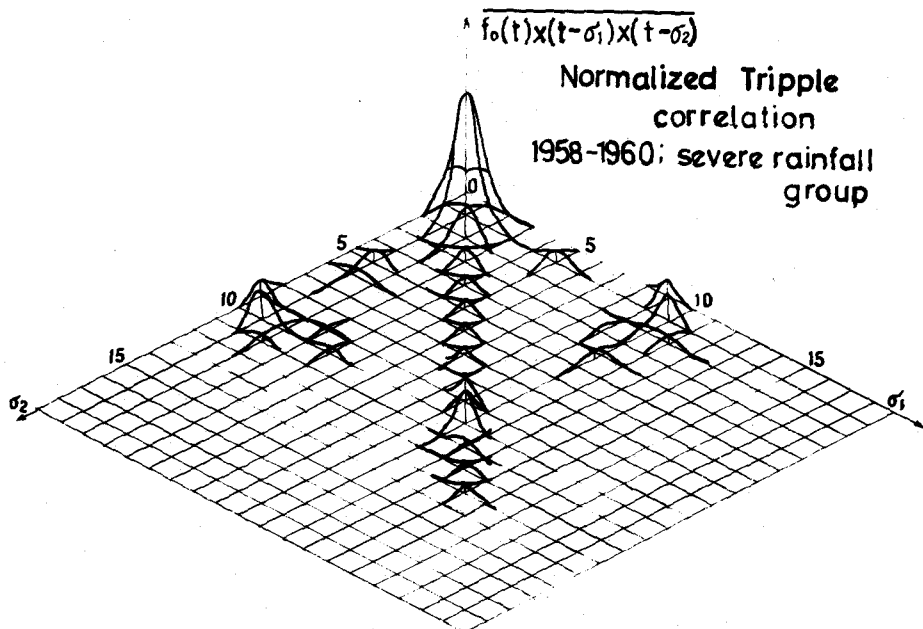
現在, C . M . W . 展開の入力は, ガウス分布をもつ白色雑音を有するという前提を満足させる為, 降雨をそのように変換させた場合, えられた核を検討し, 降雨・流出系に対する核のもつ特性を調べ全体的諸特性の把握へと研究を続けていっている。



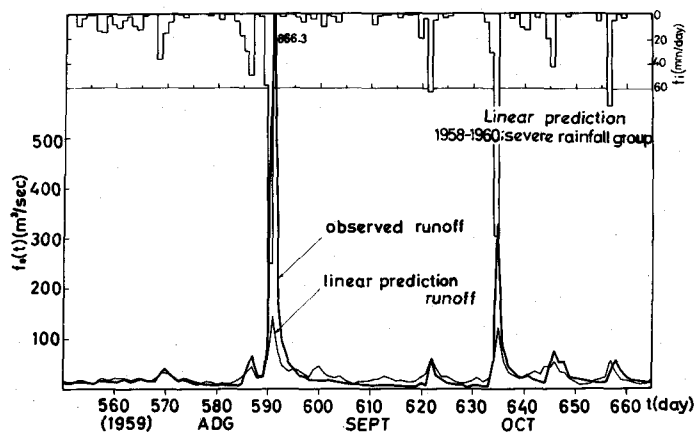
⊠ 5



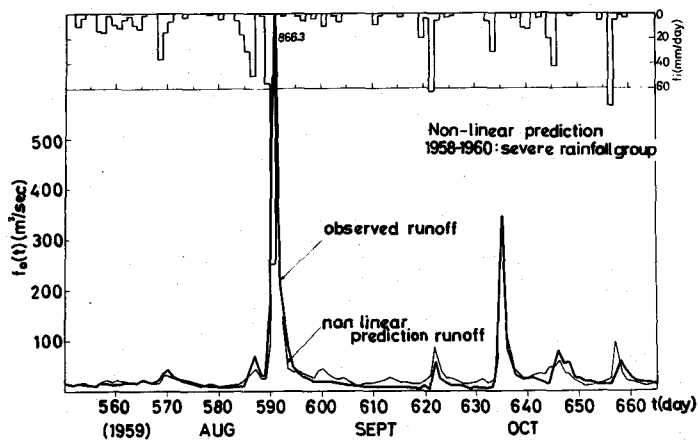
⊠ 6



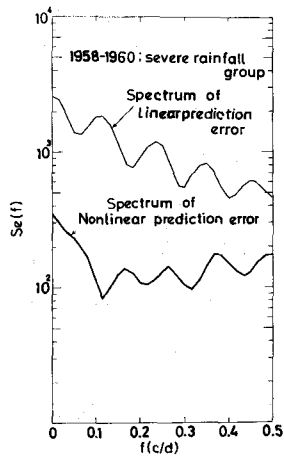
⊠ 7



8



9



10

参 考 文 献

- 1) Hino, M. : 情報理論の適用による出水予測性の向上, 第4回災害科学シンポジウム  
論文集(昭42年)
- 2) Hino, M. : Runoff forecasts by linear pre-  
dictive filter, proc. ASCE, vol. 96, no. HY3, 681  
-702 (1970)
- 3) 高棹琢馬・池淵周一 : 長期間流出機構の情報理論的研究, 京大防災研究所年報第12号B  
(昭44. 3)
- 4) Amorochio, J. : Measures of the linearity of  
hydrologic systems, J. Geophy. Res. vol. 68,  
no. 8, 2237-2249 (1963)
- 5) Jacoby, S. L. S. : A mathematical model for  
nonlinear hydrologic system, J. Geophy. Res.  
vol. 71, no. 20, 4811-4824 (1966)
- 6) Wiener, N. : Nonlinear Problems in Random  
Theory MIT Press (1958)
- 7) Cameron, R. H. and Martin, W. T. : The orthogo-  
nal development of non-linear functionals  
in series of Fourier-Hermite functionals,  
Ann. Math. vol. 48, 385-389 (1947)
- 8) Lee, Y. W. and Schetzen, M. : Measurement of a  
non-linear system by cross-correlation,  
Int. J. Control, vol. 2, no. 3, 237-254 (1965)