

1. まえがき

側岸が浸食性の流路に通水すると流路幅は次第に拡大し、やがて砂礫堆の発生と相まって流路は蛇行をはじめ。このような蛇行現象との関連において流路の拡幅をとりあつたものに足立らや長谷川らの研究があるが、まだ緒についたばかりの段階のようである。本論文は流水が蛇行せず側方を浸食して幅が拡がっていく場合の流路変動の計算法について研究したものであり、側方浸食を伴う河床変動や河口砂州の洪水による *flash* 過程などの計算に適用できるものと考えられる。

2. 流路変動に関する基礎式

(1) 河床連続の式

図-1のような流路横断面上の任意の点において、その接線方向に m 軸、法線方向に n 軸、流れ方向に x 軸、横断方向に y 軸、鉛直方向に z 軸をとると、河床の連続の式は

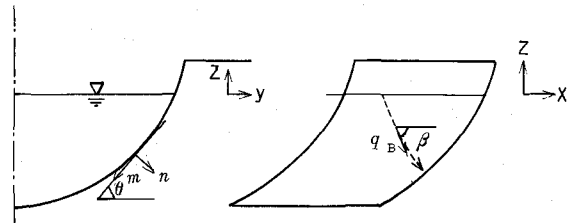


図-1

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{Bm}}{\partial m} + \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} \right) \quad (1)$$

となる。ここに、 t : 時間、 λ : 河床砂の空隙率 $\div 100$ 、 q_{Bx} および q_{Bm} : それぞれ単位幅流砂量 q_B の x 方向および m 方向の成分で、流砂の方向と x 軸とのなす角を β とすると $q_{Bx} = q_B \cos \beta$ 、 $q_{Bm} = q_B \sin \beta$ である。

(2) 斜面上における掃流砂関数

斜面上における掃流力を規定する無次元量を水平な河床におけるそれと同様の手法により求めてみる。³⁾ まず、斜面上の砂粒に作用する流体力 D は次式で表わされる。

$$D = \varepsilon \rho C_D \alpha_1 \pi d^2 \frac{u^2}{2} \quad (2)$$

ここに、 ε : 遮弊係数、 ρ : 水の密度、 C_D : 砂粒の抗力係数、 α_1 : 砂粒の面積係数で球の場合は $1/4$ 、 d : 砂粒の直径、 u : 砂粒に作用する流速である。従って、斜面上の砂粒を動かそうとする力の合力 R は

$$R = \sqrt{D^2 + W^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{\left(\varepsilon \rho C_D \alpha_1 \pi d^2 \frac{u^2}{2} \right)^2 + \left\{ (\rho_s - \rho) g \alpha_2 \pi d^2 \sin \theta \right\}^2} \quad (3)$$

ここに、 W : 砂粒の水中重量、 θ : 斜面の水平線となす角、 ρ_s : 砂粒の密度、 g : 重力の加速度、 α_2 : 砂粒の体積係数で球では $1/6$ である。一方、砂粒の抵抗力 F は砂粒の水中における摩擦係数を μ とすると、

$$F = \mu W \cos \theta = \mu (\rho_s - \rho) g \alpha_2 \pi d^3 \cos \theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

であるから動かそうとする力 R と抵抗力 F との比 R/F は

$$\frac{R}{F} = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \frac{C_D \varepsilon \varphi'^2}{\mu} \frac{u_*^2}{s g d} \frac{1}{\cos \theta} \left[1 + \tan^2 \theta \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1}{\varepsilon C_D \varphi'^2} \frac{u_*^2}{s g d \cos \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 s : 砂の水中比重で $s = (\rho_s - \rho)/\rho$, $\varphi' = u/u_*$, u_* : 摩擦速度である。上式より、 $\theta = 0$ のとき掃流力の無次元量 $u_*^2/s g d$ に等しくなることを考慮して砂粒の *mobility* に関する無次元量 M を求めると次式がえられる。

$$M = \frac{u_*^2}{s g d} \sqrt{1 + \left\{ 1 + \eta_1 \frac{u_*^2}{s g d} \right\}^2 \tan^2 \theta} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\eta_1 = \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1}{\varepsilon C_D \varphi'^2}$

また、砂粒の移動限界においては、Lane および Carlson⁴⁾ が次式を導びいている。

$$\frac{u_{*sc}^2}{u_*^2} = \cos \theta \sqrt{1 - \tan^2 \theta / \mu^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 u_{*sc} および u_* : それぞれ斜面上および水平床における砂粒の移動限界摩擦速度である。上式を式(6)に代入すると移動限界状態における *mobility* M_c がえられる。

$$M_c = \frac{u_{*c}^2}{s g d} \sqrt{1 + \left\{ \left(\eta_1 \frac{u_{*c}^2}{s g d} \right)^2 - \frac{1}{\mu^2} \right\} \tan^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (8)$$

次に、河床単位面積中に存在する砂粒の数を n , 砂粒の移動速度を u_g , その移動確率を P とすると $q_B = n u_g \alpha_2 \pi d^3 P$ であるから、 $n \propto 1/d^2$, $u_g \cos \beta \propto u \propto u_*$ とすると、 $q_B \cos \beta / u_* d \propto P$ となる。 P を M および M_c の関数と考え、 $\theta = \beta = 0$ のとき通常の掃流砂量の式に接続するようにすれば、斜面上の流砂量の式は次式のように表わすことができよう。

$$\frac{q_{Bx}}{u_* d} = K M^m \left(1 - \frac{M_c}{M} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 K および m は定数である。

(3) 砂粒の移動方向

砂粒の流下経路は流水の乱れと河床砂との衝突によってかなり変動し、また、砂粒の移動開始点の位置によっても変化するが、平均的にみれば同一水理条件と同一斜面状態のもとにおいては一本の線になるとみなしてよいであろう。

さて、斜面に静止していた砂粒が急に動き出す場合の移動方向は合力の方向と一致すると考えられるから、

$$\cos \beta = \frac{P}{R} = \sqrt{1 + \left(\eta_1 \sin \theta \frac{u_*^2}{s g d} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

また、砂粒がほぼ一定速度で移動し、 $du_g/dt = 0$ とみなせる場合には、流れ方向および斜面方向の力のつり合式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho \alpha_1 \pi d^2 C_x \frac{(u - u_g \cos \beta)^2}{2} &= \mu W \cos \theta \cos \beta \\ \varepsilon \rho \alpha_1 \pi d^2 C_m \frac{(u_g \sin \beta)^2}{2} &= W \sin \theta - \mu W \cos \theta \sin \beta \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 C_x および C_m はそれぞれ流れの方向および斜面方向の抗力係数である。上記2式より u_g を消去すれば β が求められる。実際の状態は式(10)と式(11)の間にあると思われるが水際近くでは式(10)に近く、水路中央に近づくにつれて式(11)に近くなると考えられる。

3. 流路拡幅の計算法

流砂量の式と流砂の方向を与える式が与えられれば、それらを連続の式(1)に代入することにより流路の変形状態を逐次計算することが原理的には可能である。しかし、式(1)の逐次計算は手間がかかるということの他に、式(9)の *type* の掃流砂関係が斜面勾配の急な水際附近においても適用できるかどうかという点と、流砂の方向に疑点があるので、ここでは実験結果を参照して、図-2のようなモデルを想定し計算の簡略化をはかることにする。すなわち、河床が水平に近く、流砂量式として式(9)、流砂の方向の式として式(11)が適用できる領域をA領域、それより上をB領域とし、A領域とB領域の境界 $y = \alpha b$ において式(9)および式(11)が成立つものとする。まず、河床の連続の式(1)をAおよびB領域においてそれぞれ積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} A \text{ 領域 : } (1-\lambda) \int_0^{\alpha b} \frac{\partial z}{\partial t} dy &= (q_{Bm})_{y=\alpha b} \\ &- \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy \quad (12) \end{aligned}$$

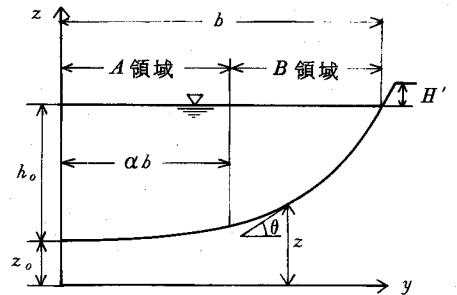


図-2 流路断面のモデル

$$B \text{ 領域 : } (1-\lambda) \int_{\alpha b}^b \frac{\partial z}{\partial t} dy = H' \frac{\partial b}{\partial t} - (q_{Bm})_{y=\alpha b} - \int_{\alpha b}^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy \quad (13)$$

ここに、 z : 河床高、 b : 水面幅の $\frac{1}{2}$ 、 H' : 水面から側壁天端までの高さである。式(12)と式(13)を加えあわせると、

$$(1-\lambda) \int_0^b \frac{\partial z}{\partial t} dy = H' \frac{\partial b}{\partial t} - \int_0^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy \quad (14)$$

次に、流路の横断形状は主として流路中央における水深 h_0 と流路幅 b によって規定されると思われるので、断面形として次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{z-z_0}{h_0} &= f(\eta, n) \\ \eta &= y/b, \quad n = h_0/b \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに、 z_0 : 流路中央における河床高、 y : 流路中心より横断方向にとった距離である。式(15)の満たすべき条件としては次式が考えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \text{ において } \quad f = 0, \quad \partial f / \partial \eta = 0 \\ \eta = 1 \text{ において } \quad f = 1, \quad \partial f / \partial \eta = \frac{b}{h_0} \tan \theta_0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 θ_0 は水際 ($y=b$) における斜面角で、ほぼ水中安息角に等しいと考えられるから $\tan \theta_0 = \mu$ としてよいであろう。式 (15) より

$$\left. \begin{array}{l} A = 2bh_0 \left\{ 1 - \int_0^1 f(\eta, n) d\eta \right\}, \quad \tan \theta = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h_0}{b} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ P = 2b \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{h_0}{b} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2} d\eta, \text{ etc} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 A : 流積, P : 潤辺である。式 (15) を時間 t で微分し、さらにそれを y について積分すると

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{\alpha b} \frac{\partial z}{\partial t} dy = \alpha b \frac{\partial z_c}{\partial t} + h_0 \{ c_{\alpha 1} - \alpha f(\alpha, n) \} \frac{\partial b}{\partial t} + c_{\alpha 1} b \frac{\partial h_0}{\partial t} \\ \int_0^b \frac{\partial z}{\partial t} dy = b \frac{\partial z_0}{\partial t} + h_0 (c_1 - 1) \frac{\partial b}{\partial t} + c_1 b \frac{\partial h_0}{\partial t} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $c_{\alpha 1} = \int_0^\alpha (f+n \partial f / \partial n) d\eta$, $c_1 = \int_0^b (f+n \partial f / \partial n) d\eta$ である。上式を式 (12) および (14) に代入して整理すると次式がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial t} = & \frac{1}{b(\alpha c_1 - c_{\alpha 1})} \{ \{ \alpha(1 - c_1 + \frac{H'}{h_0} - c_1 - f(\alpha, n)) + c_{\alpha 1} \} h_0 \frac{\partial b}{\partial t} \\ & - \frac{1}{1-\lambda} \{ (q_{Bm})_{y=\alpha b} - \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy + \alpha \int_0^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy \} \} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_0}{\partial t} = & \frac{1}{b(c_{\alpha 1} / c_1 - \alpha)} \{ \{ \frac{c_{\alpha 1}}{c_1} (1 + \frac{H'}{h_0}) - \alpha f(\alpha, n) \} h_0 \frac{\partial b}{\partial t} \\ & - \frac{1}{1-\lambda} \{ (q_{Bm})_{y=\alpha b} - \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy + \frac{c_{\alpha 1}}{c_1} \int_0^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy \} \} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\alpha b} q_{Bx} dy - [q_{Bx}]_0^{\alpha b} \frac{\partial b}{\partial x} \\ \int_0^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b q_{Bm} dy + (q_{Bx})_{y=0} \frac{\partial b}{\partial x} \end{aligned}$$

さらに、 q_{Bx} の式として式 (9) を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha b} q_{Bx} dy &= \frac{K u_{*o}^{2m+1}}{(sg)^m d^{m-1}} (c_{\alpha 2} - c_{\alpha 3} \frac{u_* c^2}{u_{*o}^2}), \quad \int_0^b q_{Bx} dy = \frac{K u_{*o}^{2m+1}}{(sg)^m d^{m-1}} (c_2 - c_3 \frac{u_* c^2}{u_{*o}^2}) \\ c_{\alpha 2} &= \int_0^\alpha \{ 1 - f(\eta, n) \}^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (n \frac{\partial f}{\partial \eta})^2 + \{ \frac{s d \eta_1}{b I e} \frac{\partial f}{\partial \eta} (1-f) \}^2} d\eta \\ c_2 &= \int_0^1 \{ 1 - f(\eta, n) \}^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (n \frac{\partial f}{\partial \eta})^2 + \{ \frac{s d \eta_1}{b I e} \frac{\partial f}{\partial \eta} (1-f) \}^2} d\eta \end{aligned}$$

$$c_{\alpha 3} = \int_0^{\alpha} (1+f)^{2m-\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left\{ \frac{s d \eta}{b I_e} \frac{\partial f}{\partial \eta} (1-f) \right\}^2} d\eta$$

$$c_3 = \int_0^1$$

ここに、 $u_{*0} = \sqrt{gh_0 I_e}$ 、 I_e ：エネルギー勾配である。

さて、式(19)および(20)において、未知数は $\partial h_0/\partial t$ 、 $\partial b/\partial t$ および $\partial z_0/\partial t$ の3個であり、式がもう1個必要であるから、流れの運動方程式を用いる。流れが定流とみなせる場合には、

$$\frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\alpha v Q}{2g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \right) + \frac{Q^2 P}{g \varphi^2 A^3} = 0 \quad (21)$$

ここに、 φ ：流速係数、 Q ：流量、 α ：エネルギー補正係数である。上式を t で微分し、 $\partial Q/\partial t = 0$ 、 $\partial \varphi/\partial t = 0$ および $1/P \cdot \partial P/\partial t = 1/b \cdot \partial b/\partial t$ として整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial z_0}{\partial t} - \frac{\alpha v Q^2}{g A^3} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial t} \right) \right\} - \frac{Q^2 P}{g \varphi^2 A^3} \left(\frac{2}{b} \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{3}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (22)$$

上式に式(19)および(20)を代入して $\partial h_0/\partial t$ および $\partial z_0/\partial t$ を消去すれば $\partial b/\partial t$ の計算式がえられ、初期条件と境界条件が与えられれば数値計算によって b 、 h_0 および z_0 の場所的、時間的変動状況を求めることができる。

以上は一般的な場合の計算法であるが、他に条件が与えられる場合には計算はずっと簡単になる。

1) $\partial h_0/\partial t = 0$ の場合

野田⁵⁾は江川河口の実測資料より河口の最大水深は流水断面積に殆んど無関係に一定であることを見出し、河口では流量の増加による流積の増大は水深を変えずに河巾を増大させることによって起ると述べている。そのような場合には $\partial h_0/\partial t = 0$ としてよいから式(19)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \left\{ (q_{Bm})_{y=\alpha b} - \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy + \alpha \int_0^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy \right\} \\ \div \left\{ \alpha (1-c_1) + \frac{H'}{h_0} - c_1 - f(\alpha, n) + c_{\alpha 1} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

上式と式(20)および式(21)を用いて計算すればよい。上式において、

$$- \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy + \alpha \int_0^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy = - (1-\alpha) \int_0^{\alpha b} \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy + \alpha \int_{\alpha b}^b \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} dy$$

であるが、一般に $\partial q_{Bx}/\partial x > 0$ のとき上式の値は負になるから、流路の拡張は $\partial q_{Bx}/\partial x > 0$ の場合は抑制され、 $\partial q_{Bx}/\partial x < 0$ の場合促進されることがわかる。

2) 流れが等流とみなせる場合

流れが等流に近く、流れ方向の変化が無視できる場合には、まず式(22)より

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = - \frac{2}{3} \frac{h_0}{b} \frac{\partial b}{\partial t} \quad (24)$$

式(24)を式(19)に代入して次式

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{(q_{Bm})_{y=\alpha b}}{(1-\lambda) h_0} \left/ \left[1 + \frac{H}{h_0} + \frac{1}{3} c_{\alpha 1} - \alpha \left\{ f(\alpha, n) + \frac{c_1}{3} \right\} \right] \right. \quad (25)$$

がえられる。式 (25), (24) および (20) を用いて計算すればよい。

4. 計算値と実験値の比較

(1) 実験の概要

長さ15mの水路にみぞを掘り、その中に一定流量通水して水路幅、横断形状、水位等を測定した。

(2) 計算条件および計算式

実験によると水路の中流部では流れ方向に水路幅がほぼ一定で等流とみなされる部分が生じているので、この部分について式 (25), (24) および (20) を用いて計算を行なう。

断面形は式 (16) の条件をみたすものとして簡単に次式を用いる。

$$f\left(\eta, \frac{h_0}{b}\right) = \eta \frac{b}{h_0} \mu \quad (26)$$

流砂量の式としては式(9)を用いるが、定数 K および m は前報における値 $K=2.7$, $m=1$ を使用する。次に、 A 領域と B 領域の境界点($y=\alpha b$)のきめ方は重要な問題であるが、ここでは斜面の傾斜角 θ がある一定の値 θ_α となる点をもって境界点とする。また、諸係数の値は、遮弊係数 $\varepsilon=0.4$, 抗力係数 $C_D=0.4$, 流速係数 φ は各実験における平均値としている。

(3) 計算値と実験値の比較

$\tan \theta_\alpha = 0.05$ とした場合の計算値と実験値の比較が図-3に示されており、両者は比較的よく合っている。

参考文献

- 1) 足立, 中藤: 沖積流路の拡幅に関する実験的考察, 第24回年講
- 2) 長谷川, 工藤, 山岡: 水路蛇曲に関する一考察, 第23回年講
- 3) 椿, 荒木: 水理学演習下巻, 森北出版
- 4) Lane, E.W., Carlson, E.J.: Some factor affecting the stability canals constructed in coarse granular materials, I.A.H.R. (1953)
- 5) 野田: 河口閉塞に関する研究(1), 京大防災研究所年報第13号B (昭45.3)
- 6) 平野, 碓, 小山: 貯水池下流の河床低下について, 第24回年講

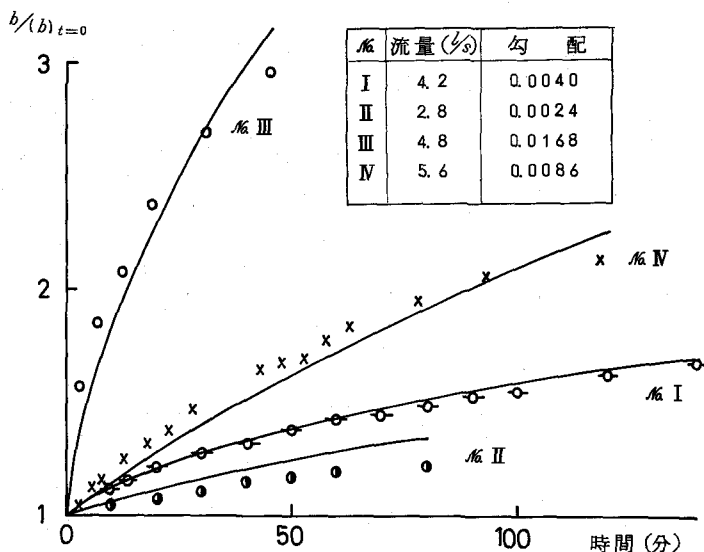


図-3 計算値と実験値の比較