

ARMOR COAT の生成に関する研究

岐阜大学工学部 正員 河村三郎

1. 緒論

流砂ある河川に大容量貯水池が築造され、しかも洪水時には、限界掃流力以上の流量が放流されると、貯水池下流部の河床は、流砂が遮断されるために、しだいに低下する。河床低下の進行中には、河床材料の細かい部分は、ふるい分け作用により河床面より、順次下流流域に流送される。したがって、河床面は粗い河床材料で被覆され、Armor Coatを生ずる。このダム下流部の Armor Coatの発生は、最も顕著な例であって、ダム下流部以外の河床においても、河床面は、通常、粗い河床材料により被覆され Armor Coatを生じている。河床材料の粒度分布の推定に関する確率論的研究は非常に少なく、最近では、河床材料の粒度組成を確率論的に考察し、その粒度分布式を導き、貯水池堆砂へ適用した足立¹⁾の研究、河川の縦断方向における粒度分布の変化特性を考察し、河川の縦断方向の任意地点における粒度分布式を導いた矢野・土屋・道上²⁾の研究、および河床面安定のプロセスは、河床材料の個々の粒子の限界掃流力の問題に關係するとして、Armor Coatを研究したJ. Gessler³⁾の研究がある。この論文は、Gesslerの研究成果^{3) 4)}をとり入れて Armor Coatの粒度分布の推定法を研究した結果の報告である。

2. ARMOR COATの粒度分布の推定式

一定流量のもとで Armor Coatを生じ、そのArmor Coatの厚さは、最大粒径の大きさであると仮定する。つぎに、水路床面上の単位面積について考える。水路床面の単位面積あたりの Armor Coatの重量を w_A 、この単位面積内から流出した水路床材料の重量を w_E とし、さらに Armor Coatと流出材料のそれぞれの粒度分布（確率密度関数）を f_A 、 f_E とする。また、Armor Coatを生ずる前の初期水路床材料の粒度分布（確率密度関数）を f_O とする。ここで、ある粒径 k について考えると、式(1) が得られる。式(1) を $(w_A + w_E) \cdot f_O(k)$ で割ると、

$$w_A \cdot f_A(k) + w_E \cdot f_E(k) = (w_A + w_E) \cdot f_O(k) \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

式(2) が得られる。一方、初期水

$$\left(\frac{w_A}{w_A + w_E} \right) \frac{f_A(k)}{f_O(k)} + \left(\frac{w_E}{w_A + w_E} \right) \frac{f_E(k)}{f_O(k)} = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

路床材料の粒径 k が安定な Ar-

$$q_A(k) + q_E(k) = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

mor Coatの材料として水

路床に残る確率を $q_A(k)$ とし、さ

らに流出する確率を $q_E(k)$ とすると、式(3) が成立

する。したがって、式(2) と式(3) から $q_A(k)$ と

$q_E(k)$ は、それぞれ式(4) と式(5) となる。式(4)

から、Armor Coatの確率密度関数は式(6)

のようになる。

$$q_E(k) = \left(\frac{w_E}{w_A + w_E} \right) \frac{f_E(k)}{f_O(k)} = 1 - q_A(k) \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$f_A(k) = \left(\frac{w_A + w_E}{w_A} \right) q_A(k) \cdot f_O(k) \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

最大および最小粒径を k_{\max} 、 k_{\min} で表現して、 $f_A(k)$ を k について積分すると、式(7) の

ようになる。したがって、 $(w_A + w_E) / w_A$ は式(8)のように表わすことができる。

$$\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} f_A(k) dk = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

式(8)を式(6)に代入して、式(9)が得られる。

$$f_A(k) = \frac{q_A(k) f_O(k)}{\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} q_A(k) f_O(k) dk} \dots \dots \dots \quad (9)$$

Armour Coat の分布関数 $F_A(k)$ (粒径加積曲線は式 (10) で与えられる。式 (10) に式 (9) を代入すると, J. Gessler⁸ が提案した式と同様の式が得られる。式 (11) が Armour Coat の粒径加積曲線を計算する基本式である。

式 (11) は直接に積分できないから、粒径分布を分割して、差分 ΔF_0 について計算する方法をとることにする。分布関数と確率密度関数の関係： $dF_0(k)/dk = f_0(k)$ ，そして $dF_A(k)/dk = f_A(k)$ から， $f_0(k)\Delta k = \Delta F_0(k)$ (12) $f_A(k)\Delta k = \Delta F_A(k)$ (13)

$$f_O(k) \Delta k = \Delta F_O(k) \quad \dots \dots \dots \quad (12) \qquad f_A(k) \Delta k = \Delta F_A(k) \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

$$f_A(k) \Delta k = \Delta F_A(k) \dots \dots \dots \dots \quad (13)$$

式(9), 式(12), 式(13)を使用すると, $\Delta F_A(k)$ は式(14)となる。したがって, $F_A(k)$ は式(15)で与えられる。

$$F_A(k) = \sum_{k=k_{\min}}^k \Delta F_A(k) \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

式(14)と式(15)から $F_4(k)$ は

$$F_A(k) = \sum_{k=k_{\min}}^k \frac{\sum_{k=k_{\min}}^k q_A(k) \Delta F_O(k)}{\sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} A(k) \Delta F_O(k)} \dots \quad (16)$$

式(16)となる。

3. 流出土砂の粒度分布の推定式

式(5)から、水路床面から流送される土砂の確率密度関数は、

式(7)と同様に、式(18)を得るから、 $f_E(k)$ は式(19)のようになる。

$$\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} f_E(k) dk = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

流出土砂の分布関数 $F_E(k)$ は式 (20) で与えられるから、式(19)と式(20)から式(21)が得られる。

$$F_E(k) = \int_{k_{\min}}^k f_E(k) dk \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

$$F_E(k) = \frac{\int_{k_{\min}}^k [1 - q_A(k)] f_O(k) dk}{\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} [1 - q_A(k)] f_O(k) dk} \quad \dots \dots \dots (21)$$

式(12), 式(13), 式(19)を使用すると,

$$\Delta F_E(k) = f_E(k) \Delta k = \frac{[1 - q_A(k)] \Delta F_O(k)}{\sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} [1 - q_A(k)] \Delta F_O(k)} \quad \dots \dots \dots (22)$$

となる。したがって流出土砂の粒径加積曲線はつきの式で与えられる。

$$F_E(k) = \sum_{k=k_{\min}}^k \Delta F_E(k) = \frac{\sum_{k=k_{\min}}^k [1 - q_A(k)] \Delta F_O(k)}{\sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} [1 - q_A(k)] \Delta F_O(k)} \quad \dots \dots \dots (23)$$

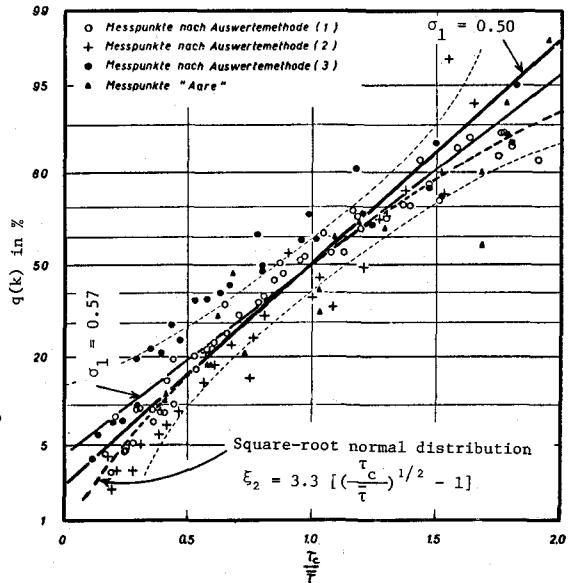


Fig. 1

式(21)または式(23)はDuneのCrest部分や貯水池内の堆積土砂の粒度分布の推定に使用できると考えられる。

4. ARMOR COAT および流出土砂の粒度分布の推定方法

(a) $q_A(k)$ の推定 J. Gessler^{3),4)} は、せん断応力の変動が正規分布に従うと仮定して実験水路と灌漑水路におけるデータを使用して Fig. 1 を得ている。図の τ_c は限界せん断応力であり、 $\bar{\tau}$ は水路床に関するせん断応力である。Fig. 1 から、 $q_A(k)$ は正規分布であり、 $\tau_c/\bar{\tau}$ の平均値は 1.0 であることから、

$$q_A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{\left(\frac{\tau_c}{\bar{\tau}}-1\right)} e^{-\frac{(\xi-1)^2}{2\sigma_1^2}} d\left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right) \quad \dots \dots \dots (24)$$

この式において、 $\xi = (\tau_c/\bar{\tau}-1)/\sigma_1$ とおくと

式(25) のようになる。 $q_A(\xi)$ と ξ との関係は、

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \dots \dots \dots (26) \text{ とおくと, } \int_0^\xi \phi(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \quad \dots \dots \dots (27)$$

であるから、 $\xi > 0$ について

$$q_A(k) = q_A(\xi) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad \dots \dots \dots (28)$$

$\xi < 0$ については、 $\phi(\xi)$ の分布の対称性にもとづき

$$q_A(k) = q_A(\xi) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad \dots \dots \dots (29)$$

となる。 $q_A(\xi)$ と ξ との関係を Table 1 に示す。この表は $\xi > 0$ の場合であって、 $\xi < 0$ の場合

は $q_A(-\xi) = 1 - q_A(\xi)$ で与えられる。一例として、
 $\xi = -1.00$ を示す。Table 1 より $q_A(1.00) =$
 0.8413 であるから、 $q_A(-1.00) = 1 - 0.8413$
 $= 0.1587$ となる。

式(24)における標準偏差 σ_1 の値については、
J. Gessler は $\sigma_1 = 0.57$ を得ている。また
H. A. Einstein⁵⁾ は $\sigma_1 = 0.5$ を得ている。
これらの数値を使用すると、 $\bar{\mu}$ はそれぞれつきの式
で与えられる。

$\sigma_1 = 0.57$ のとき,

そして $\sigma_1 = 0.5$ のとき

$$\xi = 2.0 \left(\frac{\tau_c}{\bar{\tau}} - 1 \right) \quad \dots \dots \dots \quad (31)$$

となる。Fig. 1 には、式 (30) よび式 (31) が示されている。Fig. 1 から知られるように、 $\tau_0/\bar{\tau}$ の値の小さい部分の適合性は、 $\sigma_1 = 0.5$ のほうがよいようである。

(b) τ_c / τ の計算 τ_c / ρ は限界掃流力の公式（たとえば岩垣公式）から計算するか、あるいは Fig. 2 を使用して τ_c を求め、つきの式から計算する。

$$\frac{\tau_c}{\rho} = a_c \left[\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g k \right] \dots \dots \dots \quad (32)$$

ここに、 σ = 土砂粒子の密度、 ρ = 水の密度、 g = 重力の加速度である。 \bar{r}/ρ は式(83)で与えられる。 ここに、 R_b = 水路床に関する徑深、 S =

$$\frac{\tau}{\rho} = g R_b S \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (33)$$

5. ARMOR COATの生成による粒度分布の変化

(a) Armor Coat と初期河床材料との関係 式(9)を $f_A(k)$ / $f_O(k)$ の形にすると、

$$\frac{f_A(k)}{f_O(k)} = \frac{q_A(k)}{\alpha} \dots \dots \dots \quad (34), \quad \text{и если } \alpha = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} q_A(k) f_O(k) dk = \text{Constant} \dots \dots \dots \quad (35)$$

式(35)において、 $k = \bar{k}_m$ (初期河床材料の代表粒径) とすると $q_A(k) = q_A(\bar{k}_m) = \text{Constant}$ となる。また $\int_{k_m}^{k_{max}} f_0(k) dk \approx 1$

であるから、 $\alpha = q_A(\bar{k}_m)$ となる。したがって式(34)は、 $\frac{f_A(k)}{f_0(k)} = \frac{q_A(k)}{q_A(\bar{k}_m)}$ となる。 $q_A(\bar{k}_m) = 0.2 \sim 0.5$ 程度であるから、 $1/q(\bar{k}_m) = 3, 0$ とする。

$$\text{Table 1} \quad \text{Table of } q(k) = q(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

For $\xi < 0$, $q(-\xi) = 1 - q(\xi)$

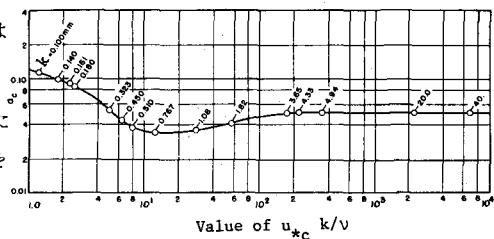


Fig. 2

$$\begin{aligned} \frac{f_A(k)}{f_0(k)} &= 3.0 q_A(k) \\ &= 3.0 q_A(\xi) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (37)$$

となる。 $k > k_{g0}$ においては $q_A(\xi) \approx 1.0$ であるから $f_A(k_{g0})/f_0(k_{g0}) = 3.0$ となる。 k_5 付近においては、 $q_A(k_5) \approx 0.05$ の程度であるから、

$f_A(k_5)/f_0(k_5) \approx 1/7$ 、また k_{min} 付近においては $q_A(k_{min}) \approx 0$ であるから $f_A(k_{min})/f_0(k_{min}) \neq 0$ となる。

(b) 流出土砂と初期河床材料との関係

式(19)より、

$$\frac{f_E(k)}{f_0(k)} = \frac{[1-q_A(k)]}{\beta} \quad \dots \dots \dots (38), \quad \text{ここに } \beta = \int_{k_{min}}^{k_{max}} [1-q_A(k)] f_0(k) dk \quad \dots \dots \dots (39)$$

$k = \bar{k}_m$ とすれば、 $\beta = [1-q_A(\bar{k}_m)] \int_{k_{min}}^{k_{max}} f_0(k) dk = [1-q_A(\bar{k}_m)]$ となる。したがって式(38)は、

$$\frac{f_E(k)}{f_0(k)} = \frac{[1-q_A(k)]}{[1-q_A(\bar{k}_m)]} \quad \dots \dots \dots (40)$$

式(34)において $1/q_A(\bar{k}_m) = 3.0$ としたから、 $1/\beta = 1.5$ となる。ゆえに、 $\frac{f_E(k)}{f_0(k)} = 1.5 [1-q_A(k)] \quad \dots \dots \dots (41)$

k_{min} の付近では、 $[1-q_A(k_{min})] \approx 1.0$ であるから $f_E(k_{min})/f_0(k_{min}) = 1.5$ となる。一方、 k_{max} 付近では $q_A(k_{max}) \approx 1.0$ であるから $f_E(k_{max})/f_0(k_{max}) \approx 0$ となる。Fig. 3は式(37)と式(41)の関係を示したものである。

6. A R M O R C O A T の粒度分布の計算例

現在、長さ $14 m$ 、幅 $0.5 m$ の水路にFig. 4の初期水路床材料を入れて Armor Coatの生成実験を実施中である。その実験データを使用して計算例を示す。

計算順序

- 1) 初期河床材料の粒径範囲を細分して、ある間隔に k_i を決める；
- 2) この k_i に対応する $F_0(k)$ を初期河床材料の粒径加積曲線の図から求め、さらに $\Delta F_0(k)$ を算出する；
- 3) 区分した粒径範囲内の k_i の平均値 k を求める；
- 4) 限界掃流力公式あるいはFig. 2と式(32)から τ_c/ρ を計算する；
- 5) 式(38)を使用して $\bar{\tau}/\rho$ を計算する；

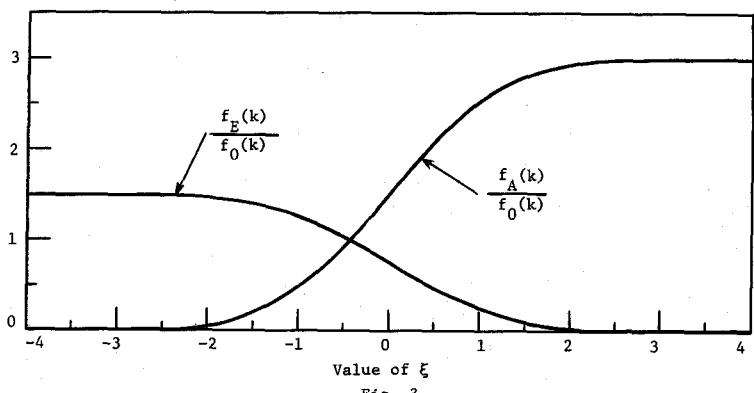


Fig. 3

- 6) $(\tau_c / \bar{\tau})$ を計算する；
 7) ξ の値を式 (80) あるいは式 (81) から求める；
 8) この ξ の値を使用して Table 1 より $q_A(k)$
 $= q_A(\xi)$ を求める；
 9) 各々の k について、 $q_A(k) \Delta F_0(k)$ を計算する；
 10) $\sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} q_A(k) \Delta F_0(k)$ を計算する；
 11) 式 (14) により $\Delta F_A(k)$ を計算する；
 12) 式 (15) により $F_A(k)$ を計算して Armor Coat の粒径加積曲線を求める。
 この計算順序による計算例を Table 2, 計算結果を Fig. 4 に示した。ただし、水路幅 $B = 0.5 m$, 水面こう配 $S = 0.000891$, 水深 $h = 0.0774 m$, 平均流速 $U = 0.373 m/sec$, 動粘性係数 $\nu = 1.10 \times 10^{-6} m^2/sec$ ($16.8^\circ C$), $R_b = 6.47 cm$, $\bar{\tau}/\rho = 5.649 cm^2/sec^2$ である。

参考文献

- 足立：河床材料粒度の確率論的考察、京大防災研究所年報11号B, 1968, pp. 83-88.
- 矢野・土屋・道上：冲積河川における河床砂れきの特性の変化について、京大防災研究所, 12号B, 1969, pp. 468-478.
- Gessler, J., "Self-Stabilizing Tendencies of Alluvial Channels," Proc. ASCE, No. WW2, 1970, pp. 235-249.
- Gessler, J., "The Beginning of Bedload Movement of Mixtures Investigated as Natural Armoring Channels," Translation T-5, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 1967, 89pp.
- Einstein, H. A., "The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows," Technical Bulletin No. 1026, USDA, Washington, D. C., 1950, 71pp.

付記：この研究は特定研究(1)(代表者、西畠勇夫教授)の補助を受けた、ここに記して謝意を表する。

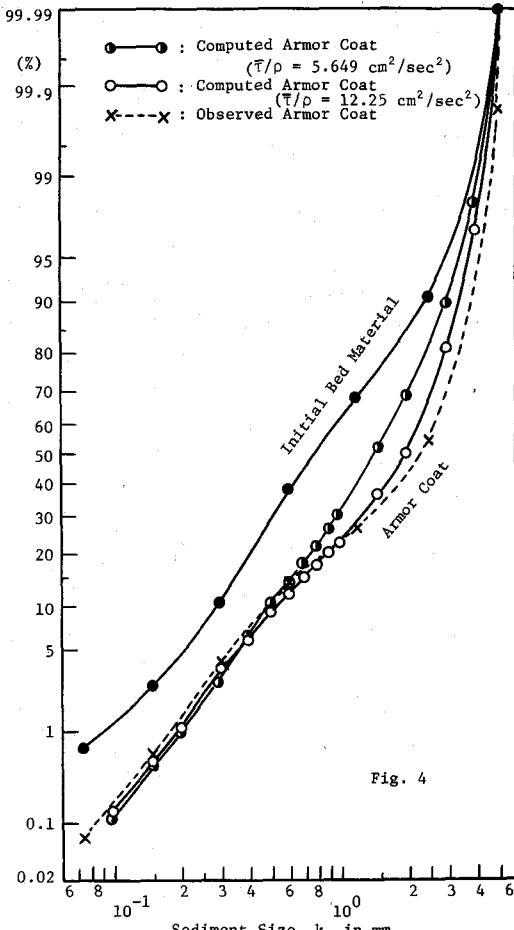


Fig. 4

k_i (mm)	$F_0(k)$ (2)	$\Delta F_0(k)$ (3)	k (mm) (4)	τ_c/ρ ($cm^2 sec^{-2}$) (5)	$\tau_c/\bar{\tau}$ (6)	ξ ($\sigma_1=0.57$) (7)	$q_A(\xi)$ $= q_A(k)$ (8)	$q_A(k) \Delta F_0(k)$ (9)	$\Delta F_A(k)$ (10)	$F_A(k)$ (11)
0.074	0.007									
0.10	0.013	0.006	0.087	1.547	0.2739	-1.2736	0.1020	0.0006	0.0012	0.0012
0.15	0.027	0.014	0.125	2.021	0.3578	-1.1264	0.1292	0.0018	0.0036	0.0048
0.20	0.046	0.019	0.175	2.320	0.4107	-1.0336	0.1515	0.0029	0.0058	0.0106
0.30	0.101	0.055	0.250	2.628	0.4652	-0.9380	0.1736	0.0095	0.0191	0.0297
0.40	0.200	0.099	0.350	2.830	0.5010	-0.8752	0.1894	0.0188	0.0378	0.0675
0.50	0.290	0.090	0.450	3.056	0.5410	-0.8051	0.2090	0.0188	0.0378	0.1053
0.60	0.374	0.084	0.550	3.202	0.5668	-0.7598	0.2236	0.0188	0.0378	0.1431
0.70	0.450	0.076	0.650	3.574	0.6327	-0.6442	0.2611	0.0198	0.0398	0.1829
0.80	0.515	0.065	0.750	4.123	0.7299	-0.4738	0.3192	0.0207	0.0416	0.2245
0.90	0.570	0.055	0.850	4.673	0.8272	-0.3031	0.3821	0.0210	0.0422	0.2667
1.00	0.615	0.045	0.950	5.530	0.9789	-0.0370	0.4840	0.0218	0.0438	0.3105
1.50	0.760	0.145	1.250	7.681	1.3597	0.6309	0.7357	0.1067	0.2144	0.5249
2.00	0.850	0.090	1.750	11.319	2.0037	1.7605	0.9608	0.0865	0.1738	0.6987
3.00	0.950	0.100	2.500	18.191	3.2202	3.8942	1.0000	0.1000	0.2009	0.8996
4.00	0.992	0.042	3.500	27.166	4.8090	6.6810	1.0000	0.0420	0.0844	0.9840
5.00	1.000	0.008	4.500	36.383	6.4406	9.5428	1.0000	0.0080	0.0160	1.0000
Total										
0.4977										

Table 2