

流砂量と限界移動について

武蔵工業大学 正員 王 方一

要旨： (1) Kalinske 公式と Rossinskiy 公式との関係 (2) 始動限界の従来の研究の検討
(3) 代表流速・躍動限界，移動速度，最大瞬間流速の取り方による計算結果の比較および実験値との比較 ($d=2mm$, $i=1/100$) (4) 浮流限界，正常輸送限界，および砂紋，砂波の発生限界に関する従来の研究による Rossinskiy 公式の適用範囲の区分 (5) Rossinskiy の式の拡張

§ 1 Kalinske 公式： Kalinske (1947, Tran. A. G. U., Vol 28, № 4) は床面粒子の移動割合が各段階の瞬間流速の分布密度に依存すると考え，それに移動速度，1個の粒子の容積を乗じて掃流砂量を表示する方式を発表した。即ち $q_B = \frac{2}{3} \cdot p \cdot d \cdot \bar{u}_g$ ----- (1)

$$\bar{u}_g \text{ は粒子の平均移動速度で } \bar{u}_g = \int_{u_{bc}}^{\infty} (u_b - u_{bc}) f(u_b) du_b \\ = (u_b - u_{bc}) \left[\frac{1}{2} - \int_0^2 f(z) dz \right] + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_c^2}{2}} \text{ ----- (1-a)}$$

を用いた。こゝに $f(u_b) = \exp \left[-\frac{(u_b - \bar{u}_b)^2}{2\sigma_{u_b}^2} \right]$; $f(z) = \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] / \sqrt{2\pi}$; $z = (u_b - \bar{u}_b) / \sigma_{u_b}$. いわゆる Kalinske 公式は $u_{bc} / \bar{u}_b = \sqrt{2} \sigma_{u_b} / \sigma$; $\bar{u}_b \propto u_*$, $\sigma_{u_b} / \bar{u}_b = 0.25$, $u_{bc}^2 / \sigma_{u_b}^2 d = 0.117$ として得た $\phi_{Kal} = q_B / u_* \cdot d = 7.3 \cdot p \cdot \bar{u}_g / \bar{u}_b$ ----- (2)
である (岩恒： 応用水理学中 (1), Chap 2-1) こゝに $p = 0.35$

いま (1) 式の代りに $q_B = \frac{2}{3} \cdot p \cdot d \cdot q_c \cdot \bar{u}_s$ (3) と表わし

$$q_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{u_b}} \int_{u_{bc}}^{\infty} f(u_b) du_b = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{u_{bc} - \bar{u}_b}{\sigma_{u_b}} \right) \right] \text{ ----- (3a)}$$

$$\bar{u}_s = \int_{u_{bc}}^{\infty} (u_b - u_{bc}) f(u_b) du_b / q_c = \bar{u}_b - (u_{bc} - u_{sr}) \text{ ----- (3b)}$$

$$u_{sr} = \frac{\sigma_{u_b}}{\sqrt{2\pi}} z_c^2 / q_c \text{ ----- (3c)}$$

こゝに $z_c = (u_{bc} - \bar{u}_b) / \sigma_{u_b}$; $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx$

とすると，粒子平均移動速度 $\bar{u}_s$ の表示はやや異なるが，流砂量の式の内容は (1) 式と全く同じで後述の Rossinskiy 公式との比較に便利である。

§ 2 Rossinskiy 公式： Rossinskiy (Soviet Hydrology 1967- № 2) は転動と躍動の両方を考えて流砂量式を作つた。即ち

$$q_B = \beta \cdot d \cdot (\pi_r \bar{u}_r + q_{en} \bar{u}_{en}) \text{ ----- (4)}$$

こゝに $\pi_r = \varphi_c - \varphi_{en}$ は転動粒子の移動割合, φ_{en} は躍動粒子の床面よりの移動割合

$$\varphi_{en} = \int_{u_{ben}}^{\infty} f(u_b) du_b = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{u_{ben} - \bar{u}_b}{\delta u_b} \right) \right] \quad \text{-----(5)}$$

$u_{ben} = \sqrt{\frac{2}{3}} \xi g d$ -----(5a) は無重状態に粒子をさせる瞬間最大底速である。こゝに揚係数 $\xi = \frac{Q}{2} = 0.06$. 転動開始速度を u_{bc} とすれば, 転動粒子の時間平均速度 $\bar{u}_r$ は(3b) 式をそのまま使えばよく u_{bc} は転動開始時の最大瞬間底速で $u_{bc} = \bar{u}_b + 3 \delta u_b$ としている。また

$$\bar{u}_r \approx \bar{u}_b - \bar{u}_{bc} \quad \text{-----(6)}$$

と近似式としている。

やく動粒子の平均速度は $\bar{u}_b + u_{sen} \leq \bar{u}_{en} < \bar{u}_b + 3 \delta u_b$ -----(7)

とし, 近似式として $\bar{u}_{en} \approx \bar{u}_b$ -----(8)

を用いる。こゝに $u_{sen} = \frac{\delta u_b}{\sqrt{2\pi}} Z_{en}^2 / \varphi_{en}$; $Z_{en} = (u_{ben} - \bar{u}_b) / \delta u_b$ -----(9)

変動流速の標準偏差と平均値の比 $K_{u_b} = \delta u_b / \bar{u}_b$ or $K_{u_{bc}} = \delta u_{bc} / \bar{u}_{bc}$ は d/h の関数として図-1より求める。

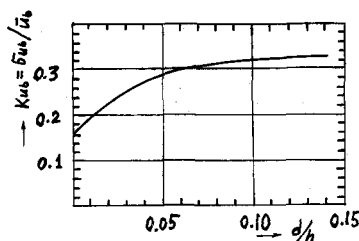


図 - 1

近似式(6), (8)を用い, また $\bar{u}_b = a_b \bar{u}_*$; $\bar{u}_{en} = a_m \bar{u}_*$; $a_r = \bar{u}_b / \bar{u}_m$ とすれば (4)式は

$$\beta_B = \beta \cdot d \left[\pi_r (a_r \bar{u}_m - a_{rc} \bar{u}_{mc}) + \varphi_{en} a_r \bar{u}_m \right] \quad \text{-----(10)}$$

となり, また

$a_{rc} \approx a_r$ とすれば(10)式は次式となる

$$\beta_B = \beta \cdot d \cdot a_r \left[(\varphi_c - \varphi_{en})(\bar{u}_m - \bar{u}_{mc}) + \varphi_{en} \bar{u}_m \right] \quad \text{-----(11)}$$

限界始動流速 $\bar{u}_{mc}$ は Goncharov の近似式 $\bar{u}'_{mc} = \bar{u}_{mc} h^{0.2}$ を用いると提案しており $\bar{u}_{mc}$ は $h = 1$ m に対する限界断面平均流速, また流速分布は, 指数分布

$$\bar{u}_b = (1+m) \left(\frac{d}{h} \right)^m \bar{u}_m ; \quad m = 2.8/a_m \quad \text{-----(12)}$$

を用いている, (11)式は Hossinskiy 公式で $\beta = 0.2$ としており Kalinske の $\frac{2}{3} p = 0.23$ に略等しい。

§ 3 限界移動

底速の程度により粒子は種々の運動形式をなす, 従つて種々の移動開始限界がある。これらの中, いわゆる始動は動揺で始めるが, 次は転動のようである。しかし従来の移動限界は平衡条件式の中で転動としても滑動としても係数が未知のため結果的に同じ総合係数となるので始動はどれを指すのか必ずしも明確でない。また, 従来の始動基準は, 移動率 0 の判定が困難なため, 事実上, ある%の移動を指しているが, 実験者の主観と感覚による相違がある。

Goncharov は瞬間最大流速が個々の粒子を移動せしめるときの平均断面流速を定義しているが,

その実際の状態は幾%移動時かを示していない。

岩恒公式(1956, 土木学会論文集41号)は $u_b = \bar{u}_b + \delta u_b$, $b=d$ ($Re\ d > 51$ のとき) 遮へい係数 $\Sigma = 0.4$ として圧力変動の項を考りよして求めたものである, 断面を通過する粒子数が数えられる状態に相当している。

竇 国仁(Dou Guo-ren)(Scientia Sinica, Vol. 11, No. 7, 1962) は粒子間の粘着力を含む転動の釣合条件にもとずき, $\hat{u} = 0.85 \bar{u}$, $u_b = \bar{u}_b + 2\hat{u}_b = \bar{u}_b + 1.70 \delta \bar{u}_b$; $b = 0.5d$ $\hat{u}_b = \text{func}(\frac{d\bar{u}}{dy})$ として限界移動流速を導き, u_{*c}^2/sgd に換算してShield曲線と比較し, ほとんど一致したのでShield曲線を5%移動時と考えた。導く過程で推力係数 $C_D = 0.4$, 揚力係数 $C_L = 0.10$, $b/d = 0.5$ としており, また遮へい作用の問題で検討の余地が残っているが, 暫定的に岩恒公式を5%と考えて本文の計算を進めた。その後土屋教授の論文(土木学会論文集80号, 82号, 1962)で, 岩恒公式を断面通過個数対表面粒子数比 0.5%/sec とする考えを知ったが, 表面よりの離脱比との関係は今後の検討にゆずる。

Rossinskiy は無重の条件を離脱限界と考えてそれより大きい流速に対してやく動すると定義し, 限界最大瞬間底速として $u_{ben} = \sqrt{\frac{3}{35} s' g d}$ (前出(5a)式)を用いているが, 係数 $\zeta = C_L/2 = 0.06$ は Dou の使用した $C_L = 0.10$ と略等しい。

池田氏(第25回土木学会年次講演集, 第2部, 1970)は Rotta の流速分布, Chepil の揚力係数 $C_L = 0.85 C_D$, 垂直圧力変動の項を考慮して $F_y \geq G'$ でやく動限界をきめた。外に Einstein らの揚力研究(1949)などがあるが, 今回は条件の変化に伴う計算結果の変化を示すために, 前述の2通りの式による u_{ben} と仮定値を使用した。

§ 4 時間平均と瞬間最大底速

Pantelopulos (1961, Tran. 9th meeting, IAHR) は変動は Gauss 分布をなすが, 実験, 実測の $u_{b\max} = 1.5 \bar{u}_b$, $K_{ub} = \delta \bar{u}_b / \bar{u}_b = \frac{1}{6}$ より $u_{b\max} = \bar{u}_b + \nu \delta \bar{u}_b$ として $\nu = 3$ を得た。Rossinskiy は $\nu = 3$ とし, K_{ub} は図-1より求めることを提案している。

Karaushev (Dou 論文: 水力学報, 創刊号, 1956より引用) は $u_{b\max} = \bar{u}_b + 3\hat{u}_b$ としていることに $\hat{u}_b$ は $|\overline{u'_b}|$ を意味する。Dou の $\hat{u} = 0.85 \bar{u}$ を用いれば $u_{\max} = \bar{u} + 2.55 \delta \bar{u}$ となる, また Dou は乱流理論, 次元解析を併用し, minskiy およびレハルトの実験値を用いて係数をきめ,

$$\hat{u}/u_* = 0.80 + 0.046 \frac{h}{u_*} \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad \text{----- (13)}$$

を得た。 y' は水面よりの巨り。(水力学報, 1959-184)

従って

$$K_{ub} = \delta \bar{u}_b / \bar{u}_b = \frac{1.18}{\alpha_b} (\hat{u}_b / u_*) \quad \text{----- (14)}$$

図-1より d/H の小さいとき K_{ub} の値が Pantelopulos の $1/6$ に接近し, $d/h \approx 0.10$ 以上になれば 0.32 になり, また Kalinske の使用した 0.25 はほぼその中間に位する。(13)式と流速分布式より $\hat{U}$ 従って K_u の分布がわかるが本文での計算は図-1によった。

§ 5 Rossinskiy の式による計算と実験値との比較

Rossinskiy 式の適否を検討するために、始動限界底速、やく動限界底速、転動速度、躍動速度をいろいろかえて計算をした。筆者の実験条件 $d = 2\text{mm}$, $i = \frac{1}{100}$ について、岩恒実験式 ($\Sigma = 0.4$ 相当) によれば $R_c = 1.42\text{cm}$ を得、 $\Sigma = 0.5$ に換算すれば $R_{c(\Sigma=0.5)} = 1.13\text{cm}$ となる。

Gonchauv 式によれば 1.13cm と殆んど一致し、また $R_{c(\Sigma=0.4)} = 1.42\text{cm}$ を $R_{c(22)}$ として Dou の $\bar{U}_{bc}(2\hat{u})$ より $\bar{U}_{bc}(3\hat{u})$ への変換式を用いても同じ値を得た。以下の計算ではこれを $3\hat{u}$ (0.6% 相当) に対応するもの、また Rossinskiy の $\bar{U}_{ben}$ の式も $\bar{u}_{ben} + 2.55\hat{u}$ として考えた。

表 - 1 は計算した条件を示し、 $\bar{u}$ は図 - 2, 3 に示す曲線と対応する。点線 (1) と (2) はそれぞれ Einstein 曲線 (1950) および Kalinske 曲線 (1947, 本文 (2) 式の変形) を示す。b は代表流速の高さ。

表 - 1

$\bar{u}$	b/d	$\bar{U}_{ben}$	$\bar{U}_r$	$\bar{U}_{en}$	使用式 $\bar{u}$
(3)	0.35	60 cm/sec	$\bar{U}_b - (\bar{U}_{bc} - \bar{U}_{dr})$	—	(3) (3a)~(3c)
(3) 0.7	0.70	"	"	—	"
(4)	0.35	"	$\bar{U}_b - \bar{U}_{bc}$	$\bar{U}_b$	(4) (6) (8)
(4) 0.7	0.70	"	"	"	(4) (6) (8)
(5)	0.35	32	"	"	(4) (6) (8)
(6)	"	27	$\bar{U}_b - \bar{U}_{bc}$	$\bar{U}_b$	(4) (6) (8)
(7)	"	60	"	$\bar{U}_b + 2.55\hat{u}_{ub}$	(4) (6)
(8)	"	60	$\bar{U}_r - (\bar{U}_{bc} - \bar{U}_{dr})$	$\bar{U}_b$	(4) (3a) (8)
(9)	"	60	"	$\bar{U}_b + 2.55\hat{u}_{ub}$	(4) (3a)

表中の $\bar{U}_{ben}$ の列の 60 cm は (5a) による計算値 ($d = 2\text{mm}$) : 32 cm/sec は池田氏の曲線 B よりよみとった $\bar{U}^2_{*c} / \text{sgd}$ を $\Sigma = 0.5$ として換算した値, 27 cm/sec は仮定した値。流速分布は Keulegan の乱粗域のものを使った。

図 - 2 からわかるように、b/d の相違による影きょうは $\frac{1}{\psi}$ と共に増加し、 $\bar{U}_{ben}$ の値による相違は低 $\frac{1}{\psi}$ 値ではかなりあるが、高 $\frac{1}{\psi}$ では漸近している、これは基本式の諸 ψ 式を見てもその傾向は想像出来る。

註：筆者の今回の計算 (第 25 回土木学会年次講演集, 第 2 部, 1970 および追加コピー)

では Goncharov の限界流速式の使用にさいし残念ながら 不注意で間違い, $\frac{1}{\psi}$ の小さい範囲での結果が, Einstein 曲線より上にたが, 図-2 の(4)曲線を例にとれば下にくるのが正しい)

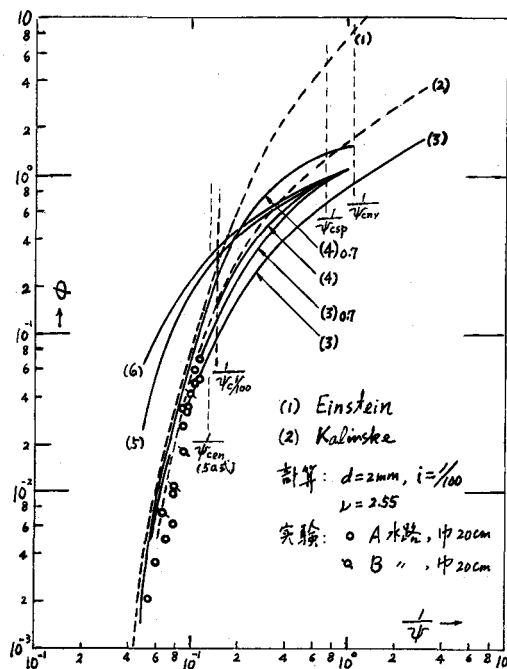


図-2

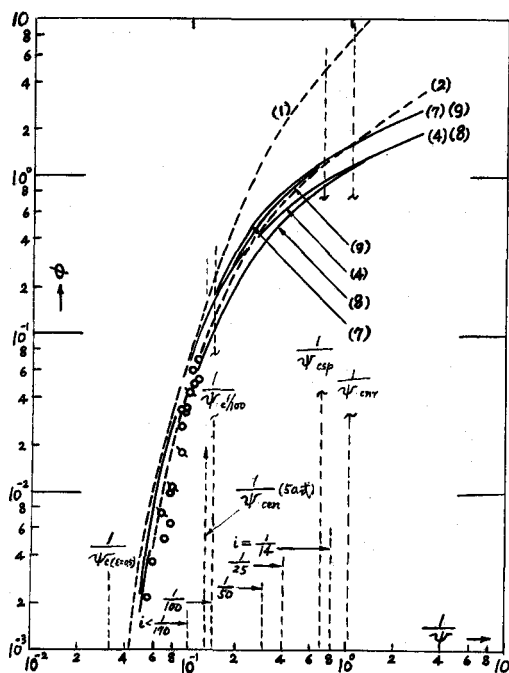


図-3

図-3 によれば $\bar{U}_r$ の近似式による曲線(4)は曲線(8)より大きく出ている。また $\nu = 3$, とした計算値と $\nu = 2.55$ の場合との差, $\bar{U}_{en} = \bar{U}_b + U_{den}$ と $\bar{U}_{en} = \bar{U}_b$ に対する ϕ の差は, 小さいため, 図にも表にも省略した。しかし $\nu = 2.55$ と $\nu = 3$ に対する $u_{*c}^2/\bar{s}gd$, $u_{*ben}^2/\bar{s}gd$ などの差は小さくない。実験値は $d = 2 \text{ mm}$, $i = 1/100$, $B = 20 \text{ cm}$, 有効長約 10 m , $h = 1.8 \sim 3.8 \text{ cm}$: 平坦河床のもの, 描点は $H_b \sim h$ とした。躍動限界 $\frac{1}{\bar{\psi}_{cen}}$ 以上は検討の必要があると考えらる。

§ 6 Rossinskiy 公式の適用範囲と拡張

公式は平坦河床, 1 層交換のモデルの下に転. 躍様式の流砂量を示しているが, $\frac{1}{\bar{\psi}}$ が大きくなれば浮流が始まる。橋教授の $\frac{1}{\bar{\psi}_{csp}} = 0.7$ ($d > 2 \text{ mm}$) (岸: 水理学演習 (2) chap. 3.5) は図-3 に示す。

Dou (1956) は $\bar{U}_{bc} (3\hat{U}_{bc}) + 3\hat{U}_{bc} = \bar{U}_{bcnr} (3\hat{U}_{bcnr}) - 3\hat{U}_{bcnr}$ 時の $\bar{U}_{bcnr}$ に対応する $\bar{U}_{mnr}$ を正常輸送平均断面流速と名付けている。 $d = 2 \text{ mm}$, $i = 1/100$, Keulegan 分布のときの $\frac{1}{\bar{\psi}_{cnr}}$ は図-3 に示す。この定義の目的は不明であるが, 想像するにはこの限界以上になれば表層粒子が全面的に離脱し, 1 層交換モデルの限界になると考えられる。(かりに

この限界が浮流限界・砂波発生限界より小さい場合があると仮定して)・今後の研究にゆずる

次に、平坦河床の維持しうる限界を考える。多くの区分基準の中、杉尾教授(土木学会論文集, 第71号, 1960)のを借用して示せば図-3の通りで、こう配がゆるいほど遷移域がせまい。Liu(1957, proc. ASCE, HY2)によれば 始動直後、砂波が発生までの範囲は非常にせまいと示し、図-3の区分点線は、第1遷移域を平坦とみなす近似的なものである。

Rossinskiy は $U_b > U_{ben}$ 以後、 $\omega_f \gg \omega'$ 以前を滑動と躍動初段階の用語を混用しているが浮遊への遷移範囲という意味から本文では躍動を用いた。しかし原文ではまた粒子が底から離れない段階と説明しているので、現象的には低剪断力に対応する躍動前期段階であると考えられる。こゝに ω_f : 沈速, ω' : 垂直方向の速度変動。

静よりの始動には流体力が原因のものと他の粒子の推動・衝突によるものとあり、また既に移動中の粒子の中、1部が他の運動形式への移行があり、矢野教授らはそれを7つの型に分類して研究して来た(矢野, 土屋, 青山: 1968, 年次講演集, 第II部, その他)。

浮流が少量で、1層交換を乱さない範囲と仮定すれば Rossinskiy の式は次のように拡張出来る。

$$g_T = g_B + g_{sp} \quad \text{-----(16)}$$

$$g_B = \beta \cdot d \left\{ \pi_{r1} \bar{u}_{r1} + \pi_{r2} \bar{u}_{r2} + \pi_{en1} \bar{u}_{en1} + \pi_{en2} \bar{u}_{en2} + \pi_{a1} \bar{u}_{a1} + \pi_{a2} \bar{u}_{a2} \right\} \quad \text{-----(17)}$$

こゝに $\pi_r = \pi_{r1} + \pi_{r2}$; $\pi_{en} = \pi_{en1} + \pi_{en2}$; $\pi_a = \pi_{a1} + \pi_{a2}$.

$$g_{sp} = \int_a^h c \cdot u \cdot dy \quad ; \quad c = f_{unc}(g_{sp}) \quad \text{-----(18)}$$

こゝに添字 r, en, a は転動(滑動含む), やく動および他の原因による形式未定の移動, 添字(1)は静止よりの移動, (2)は他の形式への移行を意味する。移行を無視すれば(17)式は

$$g_B = \beta \cdot d \left\{ \pi_r \bar{u}_r + \pi_{en} \bar{u}_{en} + \pi_a \bar{u}_a \right\} \quad \text{-----(17a)}$$

になり、浮流限界以下であれば

$$g_B = \beta \cdot d \left\{ \pi_r \bar{u}_r + \pi_{en} \bar{u}_{en} + \pi_a \bar{u}_a \right\} \quad \text{-----(17b)}$$

となり、さらに π_a を省略すれば

$$g_B = \beta \cdot d \left\{ \pi_r \bar{u}_r + \pi_{en} \bar{u}_{en} \right\} \quad \text{-----(17c)}$$

$$\text{こゝに} \quad \pi_{en} = \pi_{en} - \pi_{sp} \quad ; \quad \pi_{sp} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma u_b} \int_{u_{b,sp}}^{\infty} f(u_b) du_b \quad \text{-----(19)}$$

(17c) が Rossinskiy の式であり、更に $\pi_r = \pi_c$, $\pi_{en} = 0$, $\bar{u}_r = \bar{u}_s$ とすれば(3)となり、即ち

Kalinske の基本式(1)の修正式である

移動粒子特に躍動粒子の移行割合、軌道分布などは実験的に高精度が要求されるので Einstein 公式にあるような経験的合成係数を(17)式に基づいて検討することも設計の便利さから有益であると考える。

謝辞: 北大 岸教授, 武蔵工大 渡部教授より多くの示さ, 教示, 援助を受けた。計算には本学学生 田口三紀夫, 鈴木進両君の協力を得た。記して謝意を表わす。

・記号の追加説明: $\bar{u}_m$: 時間平均的断面平均流速; $\bar{u}_b$: 時間平均的底速;

U_b : 瞬間底速; $\hat{U} = |\overline{U'}|$: 変動流速の絶対値の平均; f_{unc} : 関数