

九州大学工学部 正員 椿 東一郎

" " 平野 宗夫

" " ○渡辺 訓甫

まえがき

掃流砂量，浮流砂量を計算し，全流砂量を求める式としては，*Einstein, Lane-Kalinske, Toffaleti*などの式があり，一応粒径毎に流砂量を計算することができる。しかしながら，浮流砂量に関しては多くの複雑な因子，即ち，掃流と浮流との境界高さ，および，その点の濃度，底面粗度の影響，浮流砂の存在による乱流構造の変化（*Kármán* 定数の変化），細かい砂が粗い砂や層流底層に遮へいされる効果などが錯綜し，式の適合性，特に実際河川に適用した場合の適合性については多くの疑点が残されている。本文は従来の水路実験資料と *Toffaleti*¹⁾ の論文にあげられている米国河川の浮流砂測定資料を用い，主として，河床に形成される *sand wave* による乱れ作用を考慮して水路実験資料と河川資料とを統一的に説明する計算方式を導こうと試みたものである。

〔1〕 計算式

(1) 流速分布・濃度分布

両分布式中の *Kármán* 定数 κ は浮流砂量の関数であるため，流砂量計算等は繰返し計算になる。また多量の測定資料をコンピュータで処理する便宜を考へて，次のような簡単な分布式を用いる。まず流速分布については平均の渦動粘性係数 $\bar{\epsilon}_m$ を用い，次の2次曲線を仮定する。

$$\frac{u}{u_*} = \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{u_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right) + \frac{u_* h}{\bar{\epsilon}_m} \left(5 - \frac{5^2}{2} \right) \quad (1)$$

ここに， u_* は摩擦速度， $\zeta = y/h$ ， $\varphi = U/u_*$ である。なお，渦動粘性係数 ϵ_m は円管における *Nikuradse* の実験結果（図-1）を参照して，その平均値

$$\bar{\epsilon}_m = 0.0575 \left(\frac{\kappa}{0.4} \right) u_* h \quad (2)$$

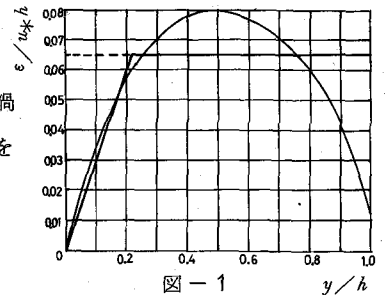


図-1

を用いる。

つぎに，浮流砂の濃度分布の基礎式 $w_0 c + \epsilon_s (dc/dy) = 0$ における拡散係数 ϵ_s は渦動粘性係数 ϵ_m に比例すると仮定し（ $\epsilon_s = \beta \epsilon_m$ ），図-1を参照して

$$\left. \begin{aligned} \zeta_* \leq \zeta \leq \zeta_2 (= 0.215) & \quad \epsilon_s = \beta \epsilon_m = 0.3 \beta (\kappa/0.4) u_* h \zeta \\ \zeta_2 \leq \zeta \leq 1 & \quad \epsilon_s = \beta \epsilon_m = 0.0645 \beta (\kappa/0.4) u_* h \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で近似する。従つて，浮流限界点 $\zeta_* = a_*/h$ より上方の濃度分布は ζ_* における濃度を c_* ， ζ_2 における濃度を c_2 とすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_* \leq \zeta \leq \zeta_2 & \quad c/c_* = (\zeta/\zeta_*)^{-Z_1} & Z_1 = w_0/0.3 \beta (\kappa/0.4) u_* \\ \zeta_2 \leq \zeta \leq 1 & \quad c/c_2 = \exp \{-Z_2 (\zeta - \zeta_2)\} & Z_2 = w_0/0.0645 \beta (\kappa/0.4) u_* \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに， w_0 は砂粒の沈降速度， c_2 は $c_2 = c_*(\zeta_2/\zeta_*)^{-Z_1}$ で与えられる。

ここで、上式における *Kármán* 定数 κ 、および、 $\varepsilon_s/\varepsilon_m = \beta$ について簡単に述べておこう。まず、浮流砂濃度の増大による κ の減少については、*Einstein*²⁾ が $s\bar{c}_i w_{oi}/\nu I = X$ と κ との間にきれいな相関を見出して以来、椿、志村、日野によって理論的な研究も行なわれている。ここでは、*Einstein* の実験曲線を次の2式でおきかえる。

$$\left. \begin{aligned} s\bar{c}_i w_{oi}/\nu I &= X \geq 0.001 & \kappa &= -0.075 \log_{10} X + 0.175 \\ &X \leq 0.001 & \kappa &= 0.4 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 s は砂粒の水中比重、 $\bar{c}_i$ は粒径 d_i 、沈降速度 w_{oi} の砂粒の平均重量濃度、 I は勾配であるまた、 β は ε_m として *Rouse* 分布の $\varepsilon_m = \kappa h u_*' (1-\zeta)$ を用いるとき、 $\beta = 1.2$ の程度であるが、図-1に示した ε_m の実測値が上式より2割程度小さいことを考慮して、一応 $\beta = 1.4$ とおく。

(2) 浮流限界点 $a_*(\zeta_*)$ と浮流砂下限濃度 c_* 、および、粗度層の導入

開水路や河川の河床には *sand wave* や不規則な凹凸が形成されているのが普通である。この場合の a_* や c_* を理論的に解明することは極めて困難であるので、ここでは次のように考える。即ち、砂粒が大きく、掃流力の小さい場合の砂の移動は *sand wave* の背面にそって流送された砂粒がその頂部より転落する形で行なわれるが、掃流力が大きく、かつ、砂粒が小さい場合は *crest* 付近で吹き上げられた形で移動するものと考えられる。実際、*Theodorsen*⁴⁾ が境界層における乱れの基本的構造として、 $\cap$ 形渦管 (*horseshoe vortex*) の存在を示摘して以来、かなり多くの研究が行なわれ、特に最近、石原・余越⁵⁾ は河床領域における $\cap$ 形渦管の形成と発達、および、 $\cap$ 形渦管が誘導する斜め上流向きの *jet* の存在などについて詳細な検討を行なっている。また、土屋・星畑⁶⁾ は砂れん、特に3次元的な砂れんが発生すると、ねじり流れが発生し、浮流砂の舞上りが顕著になることから、浮流砂の吹上機構について興味深い提案を行なっている。現在のところ、上昇流の定量的な性質は明らかでないが、両氏が行なった舞上り高さの実験結果によると、平均して砂れんの波形勾配 (ほぼ $1/10$) のもとに、舞上り高さと砂れん波高との比は2.3の程度である。また、著者らも、波高 $H = 2\text{cm}$ 、波長 $\lambda = 20\text{cm}$ の三角形粗度 (2次元 *dune* の模型) を作り、吹上げ高さの測定を行なった。その結果、*sand wave* の *crest* 前面に形成されるはく離渦の長さ λ_s は $\lambda_s/H \approx 3.5$ 程度であり、はく離渦下流点後の底面に注入した着色液の吹上げ高さは平均河床より測って、その *sand wave* の *crest* において H の2倍程度、次の *crest* において2.5倍程度である。従って、*sand wave* の背面を掃流された、いわゆる掃流砂は、上述の吹上げを粗度によって惹起された *scale* の大きい乱れとみなすと、まず乱れに捕えられて拡散作用の大きい粗度層を浮流するものとし、掃流層の厚さ a_* は平均河床より $H/2$ 程度で濃度 c_o はほぼ一様、粗度層の厚さ a_k は吹上げの高さ $a_2 H$ にほぼ等しいと考えられる。

現状では、*sand wave* の波高 H 、波長 λ などを水理量と底質条件との関数として予知することはできないが、特に波高 H は、

$$\frac{U}{u_*} = 8.5 - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{\kappa s} \quad (6)$$

で定義される相当粗度 k_s に反映することが予想される。図-2は $k_s/H (= 1/\alpha_1)$ と λ/H との関係は今までの実験資料より求めたもので、 $\kappa = 0.4$ の場合は前に示したが、この図では κ の変化も考慮されている。従って、吹上げ高さを a_k とすると

$$Q_k = \alpha_2 H = \alpha_2 \alpha_1 k_s \quad (7)$$

となり、 α_2, α_1 は主として λ/H の関数であることが予想され、上の測定結果によると $\lambda/H \approx 10$ のとき $\alpha_2 \alpha_1 = 2.3 \times \frac{1}{2} = 1.15$ の程度である。河川における λ/H の測定資料は殆んど無いが浮流砂を主とするような底質の細かい河川では $\lambda/H \leq 10$ 程度のものが卓越しているであろう。 λ/H が減少すると $\alpha_2 \alpha_1$ は増加する傾向にあるので、計算には、一応 $\alpha_2 \alpha_1 = 1.5$ を用い、粗度層の拡散係数は一定で粗度層の上限に

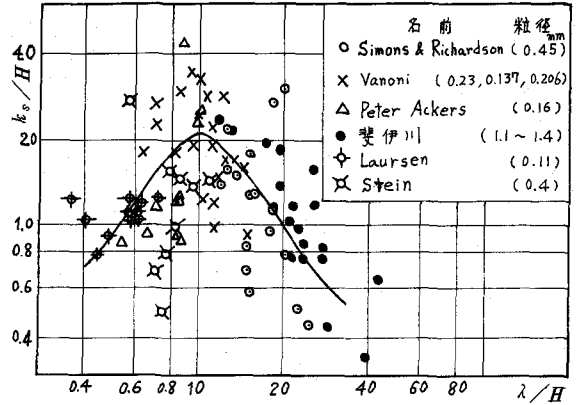


図-2 相当粗度とduneのスケールとの関係

における値を用いる。次に、掃流層の厚さ $\alpha_k \approx H/2 = \alpha_1 k_s/2$ における α_1 は図-2より2~0.5の程度であるから、一応 $\alpha_k = \frac{1}{2} k_s$ とおく。また、掃流層濃度 c_0 と粗度層の下限濃度 c_k との接続は乱れに捕えらる条件を導入し、不連続であろうと考える。従って、つり合いの条件

$$c_k \int_{w_0}^{\infty} (w' + w_0) f(w') dw' = c_0 \int_{w_0}^{\infty} (w' - w_0) f(w') dw'$$

より決まる

$$\frac{c_k}{c_0} = f\left(\frac{w_0}{u_*}\right) = \frac{\varphi(\sigma) - F(\sigma)}{\varphi(\sigma) + E(\sigma)}, \quad \varphi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}, \quad F(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\infty} \varphi(\sigma) d\sigma, \quad E(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \quad (8)$$

を用いる。ここに、 w' は乱れの鉛直成分、 $f(w')$ は確率密度関数で正規分布を仮定し、 $\sigma = w_0/0.93 u_*$ である。なお、電算計算を簡単化するため、計算にあたっては(8)式を次式で簡単化した。

$$\frac{c_k}{c_0} = f\left(\frac{w_0}{u_*}\right) = \frac{\varphi(\sigma) - F(\sigma)}{\varphi(\sigma) + 1 - F(\sigma)}, \quad F(\sigma) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right\} \quad (9)$$

最後に、掃流層の流砂量を $i_B q_B$ とすると、この層の平均濃度 c_0 は砂粒の移動速度を $\varphi_1 u_*'$ として

$$c_0 = i_B q_B / \varphi_1 u_*' \quad (10)$$

で与えられる。

[2] 全流砂量の計算式

以上のことから、 $\alpha_k(c_k)$ より上部の浮流砂量 $i_s q_s$ は、特に多い $1 > \zeta_2 > \zeta_k > \zeta_*$ の場合、各粒径 d_i について次式

$$i_s q_s = \int_{\zeta_*}^{\zeta_k} u c h d\zeta + \int_{\zeta_k}^{\zeta_2} u c h d\zeta + \int_{\zeta_2}^1 u c h d\zeta = c_k u_*' h \left\{ I_B' + \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_k} \right)^{-Z_1} \exp\{-Z_3(\zeta_k - \zeta_*)\} \cdot (I_A + I_B) \right\}$$

で表示されるから、掃流砂量、全流砂量の無次元表示 $\Phi_{Bi} = i_B q_B / i_b \sqrt{sg d_i^3}$, $\Phi_{Ti} = i_T q_T / i_b \sqrt{sg d_i^3}$ は次式で与えられる。

$$\zeta_2 > \zeta_k > \zeta_* \quad \Phi_{Ti} = \Phi_{Bi} \cdot \left\{ 1 + f\left(\frac{w_0}{u_*}\right) \frac{u_*}{u_*'} \frac{1}{\varphi_1 \zeta_k} \left\{ I_B' + \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_k} \right)^{-Z_1} \exp\{-Z_3(\zeta_k - \zeta_*)\} \cdot (I_A + I_B) \right\} \right\} \quad (11)$$

$$\text{ここに、} I_A = \frac{1}{(1-Z_1)} \left\{ \zeta_2 \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{u_* h}{E_m} \right) + \frac{u_* h}{E_m} \left(\zeta_2 - \frac{\zeta_2^2}{2} \right) \right\} - \zeta_k \left(\frac{\zeta_k}{\zeta_2} \right)^{-Z_1} \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{u_* h}{E_m} \right) + \frac{u_* h}{E_m} \left(\zeta_k - \frac{\zeta_k^2}{2} \right) \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(1-Z_1)(2-Z_1)} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \left\{ \zeta_2^2 (1-\zeta_2) - \zeta_*^2 \left(\frac{\zeta_*}{\zeta_2} \right)^{-Z_1} (1-\zeta_*) \right\} \\
& - \frac{1}{(1-Z_1)(2-Z_1)(3-Z_1)} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \left\{ \zeta_2^3 - \zeta_*^3 \left(\frac{\zeta_*}{\zeta_2} \right)^{-Z_1} \right\} \\
I_B &= \exp\{-Z_2(1-\zeta_2)\} \cdot \left[-\frac{1}{Z_2} \cdot \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right) + \frac{1}{2} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right\} + \frac{1}{Z_2^2} \cdot \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right] \\
& + \left[\frac{1}{Z_2} \cdot \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right) + \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \left(\zeta_2 - \frac{\zeta_2^2}{2} \right) \right\} + \frac{1}{Z_2^2} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} (1-\zeta_2) - \frac{1}{Z_2^3} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right] \\
I'_B &= \exp\{-Z_3(\zeta_* - \zeta_*)\} \cdot \left[-\frac{1}{Z_3} \cdot \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right) + \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \left(\zeta_* - \frac{\zeta_*^2}{2} \right) \right\} - \frac{1}{Z_3^2} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} (1-\zeta_*) + \frac{1}{Z_3^3} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right] \\
& + \left[\frac{1}{Z_3} \cdot \left\{ \left(\varphi - \frac{1}{6} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right) + \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \left(\zeta_* - \frac{\zeta_*^2}{2} \right) \right\} + \frac{1}{Z_3^2} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} (1-\zeta_*) - \frac{1}{Z_3^3} \frac{U_* h}{\bar{\epsilon}_m} \right]
\end{aligned}$$

〔3〕 資料と Φ_{Bi} の計算

水路実験資料のうち底質の範囲の広いものは、*Einstein-Chein*, *Vanoni*, *Nomikos* のもので、これらは $d = 0.062 \sim 0.25$, $d = 0.125 \sim 0.25$, $d = 0.25 \sim 0.5$, $d = 0.5 \sim 1$, $d = 1 \sim 2$ (単位 mm) のように 2 倍の粒度範囲毎に全流砂量が測定されているから、(11) 式より粒径毎の Φ_{Bi} が計算される。その他の資料 *Kennedy* ($d = 0.55 mm$, $0.277 mm$), *Laursen* ($d = 0.11 mm$), *Guy-Simmons-Richardson* ($d = 0.195 mm$, $0.27 mm$ 等) のものは均一砂に近く、 d_{50} の均一砂として Φ_{Bi} を計算した。つぎに、河川資料は *Toffaleti* の論文にのせられている米国の 6 河川、7 地点のものでその要目を表-1 に示した。河川では測定下端水深 ζ_1 から水表面までの浮流砂量 Φ_{si} が測定されている。 Φ_{si} と Φ_{Bi} との関係は $\zeta_2, \zeta_1, \zeta_k$ の大小関係によって若干異なるが、多くの資料は $\zeta_2 > \zeta_1 > \zeta_k$ の場合であって、このときは次式のようになる。

$$\Phi_{Bi} = \Phi_{si} \cdot \left[\left\{ \left(\frac{u_*}{u_*} \right) \frac{u_*}{u_*} \frac{1}{\varphi \zeta_*} \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_*} \right)^{-Z_1} \exp\{-Z_3(\zeta_* - \zeta_*)\} \cdot (I'_A + I'_B) \right\}^{-1} \right] \quad (12)$$

以上の操作によって計算された Φ_{Bi} は掃流砂と考えているので (10) ~ (12) 式の u_* は有効摩擦速度であって、篠原・椿の表示

表-1 河川資料の要目

河 川 名	h (m)	$I \times 10^4$	U ($\frac{m}{sec}$)	d_{65} (cm)	κ	k_s (cm)
<i>Atchatalaya River</i>	14.7 ~ 6.10	0.513 ~ 0.043	1.96 ~ 0.332	0.041 ~ 0.013	0.357 ~ 0.21	121 ~ 0.631
<i>Mississippi River</i> (1)	16.4 ~ 7.50	0.432 ~ 0.183	1.59 ~ 0.625	0.038 ~ 0.02	0.399 ~ 0.239	76.8 ~ 4.13
(2)	17.3 ~ 4.67	1.34 ~ 0.251	2.43 ~ 0.625	0.088 ~ 0.024	0.373 ~ 0.238	157 ~ 3.65
<i>Red River</i>	7.38 ~ 3.00	0.797 ~ 0.661	1.14 ~ 0.369	0.029 ~ 0.013	0.339 ~ 0.264	205 ~ 33.1
<i>Rio Grande River</i>	1.46 ~ 0.36	8.9 ~ 7.4	2.39 ~ 0.625	0.045 ~ 0.027	0.298 ~ 0.228	34.0 ~ 0.399
<i>Middle Loup River</i>	0.641 ~ 0.204	15.7 ~ 1.08	0.942 ~ 0.439	0.049 ~ 0.034	0.399 ~ 0.288	11.3 ~ 1.26
<i>Niobrara River</i>	0.741 ~ 0.287	18.0 ~ 1.23	1.37 ~ 0.552	0.039 ~ 0.025	0.359 ~ 0.297	18.5 ~ 1.34

$$u_{*e} = u_* (\varphi/\varphi_0)^{1/2}$$

$$\varphi_0 = 6.0 + 5.75 \log_{10} (h/\bar{a})$$

を用い、 $\varphi_1 = 8.5$ とおく。別に、河床砂が巻上げられる可能性も考えられるが、この場合は(10)式の c_0 は底面付近濃度と解釈され、 u_{*k}/w_{0i} の関数となることが期待されるので $i_B q_{Bi}/u_{*k} s = \Phi_{Bi} \times \Psi^{-1/2} (d_i/k_s)$ と u_{*k}/w_{0i} との関係も検討することにした。

なお、以上の2通りの計算の他に比較計算として (a) は *Einstein* の方法に従い、 $a_{*k} = 2d_{65}$ 、下限濃度は掃流層濃度と接続 (*Einstein* の方法) する方式、(b) (a) の層の上部に粗度層を導入し $y = 2d_{65}$ より相当粗度 k_s 間の拡散係数を一定 ($\epsilon_s = 0.3\beta (\kappa/0.4) u_{*k} h \zeta_k$) として Φ_{Bi} を求め (粗度層)、各々について Φ_{Bi} と Ψ_{ei} との関係も求めた。

〔4〕 結果の考案

sand wave により惹起される乱れを考慮し、 $a_{*k} = 0.5k_s$ 、 $a_k = 1.5k_s$ として水路実験資料から逆算した Φ_{Bi} と Ψ_{ei} との関係を示したものが図-3の (a) である。図から明らかなように $\Psi_{ei} \leq 1.0$ の範囲では *Einstein* の均一砂掃流曲線に近く、粒径 $d_i/\bar{d}$ や、特に *Reynolds* 数 $u_{*k} d_{50}/\nu$ にはほぼ無関係にかなり良くまとまり、平均的には次式で表わされる。

$$\left. \begin{array}{ll} \Psi_{ei} \geq 0.4 & \Phi_{Bi} = 9.6 \Psi_{ei}^{1.5} \\ \Psi_{ei} \leq 0.4 & \Phi_{Bi} = 46 \Psi_{ei}^{3.15} \end{array} \right\} \quad (13)$$

河川資料については、*Mississippi* および、*Atchafalaya River* の資料を図-3 (b) に、その他の河川のもを図-3 (c) に示し、同図には水路実験資料の散らばりの範囲を点線で、(13) 式を実線で示している。 $d = 0.19mm$ 、および、流砂量の非常に小さい $d = 0.38mm$ 砂の散らばりが大きく、一部は水路実験より大き目の値を与えるが、河川資料であり、かつ、粒径毎のプロットであるから、河床砂の占める割合 i_b や浮流砂量の測定にかなりの誤差がさげられないことを考えると、水路実験資料とかなりの程度まで一致していると言えよう。また、 $\Psi_e \geq \Psi_c$ の場合、掃流砂強度 Φ_B は Ψ_e の $3/2$ 乗に比例すると言われているが、図-3はこの関係をほぼ満している。このことは、 Φ_B は掃流砂が主であって、河床砂の巻上げが少ないことを示すものと思われる。なお、 α_1, α_2 の値には若干の任意性があるので、 $a_{*k} = \frac{1}{4} k_s$ 、 $a_k = k_s$ などの場合も計算したが、図-3と大きな差異はみられない。

つぎに、河床砂が巻き上げられたとして、 $i_B q_B / i_b u_{*k} s$ を u_{*k}/w_0 の関数としてプロットしたが *Einstein* 法、および、 ϵ_s = 一定とした方式とともに統一的な関係は見出せなかった。

参考文献

- 1) Toffaleti : Committee on Channel Stabilization, CORPS OF ENGINEERS, U. S. ARMY, TECHNICAL REPORT № 5, November, 1968.
- 2) Einstein : UNIVERSITY OF CALIFORNIA INSTITUTE OF ENGINEERING RESEARCH, 1954.
- 3) 椿東一郎 : 水工学に関する夏季研修会講義集, 1966.
- 4) Theodorsen, Th. : The structure of turbulence, 50 Jahre Grenzschichforschung, 1955.
- 5) 石原・余越 : 河川の乱流構造に関する一考察, 防災研年報第 13 号 B, 昭 45 年 3 月.
- 6) 土屋・星畑 : 浮流砂の浮上機構について, 25 回土木学会年講, 昭 45 年 10 月.
- 7) 椿・平野 : 浮流砂の流入による堆砂過程, 23 回土木学会年講, 昭 43 年 10 月.

