

開水路彎曲部における流れの解法について

神戸大学 正員 松 梨 順三郎

1. 基礎方程式

著者は昨年の年次学術講演会において，“開水路彎曲部流れの水理特性について”と題して，彎曲部流れの基礎方程式をつぎのように発表した。³⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rh \int_0^1 U_r^2 d\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(h \int_0^1 U_\theta U_r d\eta) - h \int_0^1 U_\theta^2 d\eta &= gh I_r r \cos \alpha - \frac{r \tau_{ro}}{\rho} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 h \int_0^1 U_\theta U_r d\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(h \int_0^1 U_\theta^2 d\eta) &= gh I_\theta r \cos \alpha - \frac{r \tau_{\theta o}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(h \int_0^1 U_\theta d\eta) + \frac{\partial}{\partial r}(rh \int_0^1 U_r d\eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに，座標系は円筒座標 $(r, \theta, \bar{x})$ とし， $\bar{x}=0$ の座標面は水平面と角 α をなすものとする。 r および θ 方向の速度成分をそれぞれ U_r および U_θ ，底面掃流力強度の成分をそれぞれ τ_{ro} および $\tau_{\theta o}$ ，水面勾配をそれぞれ I_r および I_θ とし， h は水深， g は重力の加速度， ρ は水の密度， $\eta = \bar{z}/h$ ， $\bar{z} = \bar{x} - \varepsilon(r, \theta)$ で， $\varepsilon(r, \theta)$ は河床形状を表わす既知関数とする。方程式(1)を用いて解析を進めていくにはまづ U_r および U_θ の変数 η に関する分布特性を与える必要がある。

1) $U_r(r, \theta, \eta)$ および $U_\theta(r, \theta, \eta)$ の近似式

式(1)は彎曲部の曲率半径に比して水深が小さく， $h/r \ll 1$ である場合の，つぎのような乱流の基礎方程式をもとにして誘導せられている。^{3), 1)}

$$\left. \begin{aligned} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + U_\theta \frac{\partial U_r}{\partial \bar{x}} - \frac{U_\theta^2}{r} &= R_o - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial \bar{x}} \\ U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_\theta \frac{\partial U_\theta}{\partial \bar{x}} + \frac{U_r U_\theta}{r} &= \theta_o - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \bar{x}} \\ 0 &= Z_o - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに， $R_o = -g \sin \alpha \cos \theta$ ， $\theta_o = g \sin \alpha \sin \theta$ ， $Z_o = -g \cos \alpha$ とする。

いま開水路彎曲部の延長が非常に長く，そのためにいずれの r 方向断面においてもその速度分布が θ 方向に無関係であり，さらに水路幅が非常に広くて，式(2)の各式の左辺加速度項は遠心力にもとづく項， U_θ^2/r を除いて省略しうる場合を考察する。すると式(2)はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{U_\theta^2}{r} &= g I_{ro} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial \bar{x}} \\ 0 &= g I_{\theta o} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \bar{x}} \\ p &= \rho g (h + \varepsilon - \bar{z}) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに I_{ro} および $I_{\theta o}$ はそれぞれ r 方向および流れの主流方向における水面勾配とする。式(8)の第2式を境界条件 $[\tau_{\theta z}]_{z=h} = 0$ のもとに積分し、プラントルの混合距離の理論を適用すると、よく知られている流速分布に関する対数法則をうる。

$$U_{\theta} = \frac{U_{\theta*}}{k} \log \frac{z}{z_0} \quad (4)$$

ここに、 $U_{\theta*} = (\tau_{\theta o}/\rho)^{1/2}$ であり、 z_0 は境界条件 $[U_{\theta}]_{z=z_0} = 0$ によつて定義され、 k はカルマン常数とする。式(4)を用いて U_{θ} の最大値 $U_{\theta max}$ および平均値 $U_{\theta m}$ を求めると、

$$U_{\theta max} = U_{\theta*} \frac{1}{k} \log \frac{h}{z_0} \quad (5), \quad U_{\theta m} = U_{\theta*} \frac{1}{k} \log \frac{h}{z_0} - \frac{1}{k} \quad (6)$$

これらの式から h/z_0 を消去し、Chezy の平均流速公式 $U_{\theta*} = U_{\theta m} \sqrt{g}/C$ を代入すると、 $U_{\theta max} = U_{\theta m} \{1 + \sqrt{g}/(kC)\}$ 、これを式(5)に代入すると、

$$\frac{1}{k} \log \frac{h}{z_0} = \frac{U_{\theta m}}{U_{\theta*}} \left(1 + \frac{\sqrt{g}}{kC}\right) \quad (9)$$

一方式(4)の z を η に変数変換し、式(9)を代入すると、

$$U_{\theta} = U_{\theta m} \{1 + m(1 + \log \eta)\} \quad (10)$$

ここに、 $m = \sqrt{g}/kC$ とする。

つぎに式(3)に $\tau_{rz} = \rho \nu_t (\partial v_r / \partial z)$ を代入し、 z を η に変数変換して、境界条件 $[\tau_{rz}]_{\eta=1} = 0$ のもとに積分すると、

$$\rho \nu_t \frac{\partial v_r}{\partial \eta} = -\rho g h^2 I_{ro} \eta - \frac{\rho h^2 U_{\theta m}^2}{r} \{m^2 (\log \eta)^2 + 2m \log \eta + m^2 + 1\} \eta + C_1 \quad (11)$$

ここに、 $C_1 = \rho g h^2 I_{ro} + \rho h^2 U_{\theta m}^2 (m^2 + 1)/r$ 、 ν_t は渦動粘性係数とする。一般に ν_t は η の関数であるが、簡単化のためにここでは ν_t の代りにその η についての平均値 ν_{tm} を用いることにし、式(11)を境界条件 $[v_r]_{\eta=0} = 0$ のもとに積分すると、

$$v_r = -\frac{g h^2 I_{ro}}{2 \nu_{tm}} (\eta^2 - 2\eta) - \frac{h^2 U_{\theta m}^2}{4 r \nu_{tm}} \left[\{2m^2 (\log \eta)^2 + (-2m^2 + 4m) \log \eta + 3m^2 - 2m + 2\} \eta^2 - 4(m^2 + 1)\eta \right] \quad (12)$$

一方、連続方程式の一般形は式(1)の第3式で与えられるが、ここで考えている流れに対しては、次式で与えられるとしてよい。

$$\int_0^1 v_r d\eta = 0 \quad (13)$$

式(13)が満足せられるように、この場合の r 方向の水面勾配 I_{ro} を決定すると、

$$I_{ro} = \frac{-U_{\theta m}^2}{36 r g} (17m^2 + 30m + 36) \quad (14)$$

式(14)を式(12)に代入すると、

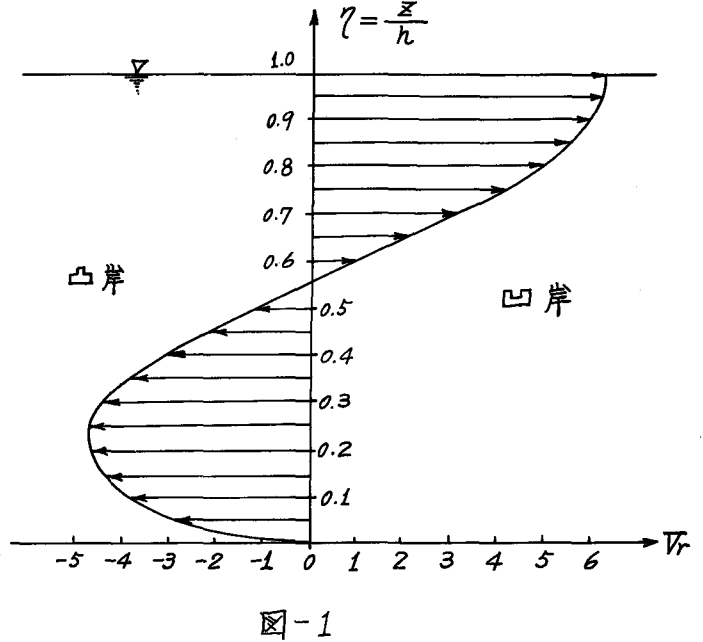
$$U_r = \frac{h^2 U_{0m}^2}{72r k_m} \left[\eta^2 \{-36m^2 (\log \eta)^2 - 18(-2m^2 + 4m) \log \eta - 37m^2 + 66m + 7(38m^2 - 60m)\} \right] \quad (15)$$

つぎに式(8)の第2式を積分すると、
 $\tau_{0z} = \rho U_{0x}^2 (1 - \eta)$ 、プラントルの混合
 距離の理論によると $\tau_{0z} = (\rho k_t / h) (20 /$
 $27)$ 、両者より τ_{0z} を消去し、(10)式を
 代入して、 k_t について解き、その平均
 値 k_{tm} を求めると、

$$k_{tm} = \frac{\sqrt{g} k h U_{0m}}{6C} \quad (16)$$

式(16)を式(15)に代入し、無次元の r 方向
 流速成分 V_r をあらたに導入すると、

$$V_r = \eta^2 \{-36m (\log \eta)^2 - 36(m+2) \log \eta - 37m + 66\} + 7(38m - 60) \quad (17)$$



ここに、 $U_r = (k_{tm} h C U_{0m} V_r) / (12 r k \sqrt{g})$ 、 k は補正の係数で実験資料によつて決定せられる
 べき係数である。図-1 は $R = 2.34 \text{ ft}$ 、 $K = 0.425 \text{ ft}$ 、 $k = 0.4$ の場合の V_r の分布を表わす。ただし、

$$m = \frac{\sqrt{g}}{kC} = \frac{1}{k(6.0 + 5.75 \log_{10} R/K)} \quad (18)$$

とし、 K は河床粗度、 R は水路の径深とする。

2) 基礎方程式の変形

まず式(10)および(17)の U_0 および V_r を式(1)の第1および第2式に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} P_m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h^3 U_{0x}^2}{r} \right) + Q_m \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^2 U_{0m}^2}{r} \right) - R_m h U_{0x}^2 &= -ghr \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} (h + \varepsilon) - r U_{0x}^2 \\ Q_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h^2 U_{0m}^2) + R_m \frac{\partial}{\partial \theta} (h U_{0x}^2) &= ghr J_{\theta_0} \cos \alpha - gh \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial \theta} - r U_{0x}^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} P_m &= \frac{1}{144 k^2 m^2} \left(\frac{24}{3125} P_0 - \frac{6\theta_0}{625} + \frac{2n_0}{125} - \frac{l_0}{25} + \frac{t_0}{5} + \frac{b_0}{64} - \frac{f_0}{16} + \frac{d_0}{4} + \frac{c_0}{3} \right) \\ Q_m &= \frac{1}{12 k^2 m^2} \left(-\frac{2P_1}{27} + \frac{2\theta_1}{27} - \frac{r_1}{9} + \frac{\delta_1}{3} - \frac{t_1}{4} + \frac{b_1}{2} \right), R_m = \frac{1}{k^2 m^2} (m^2 + 1) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 1296m^2, \theta_0 = 2592(-m^2 + 2m), n_0 = 72(55m^2 - 138m + 72) \\ l_0 &= 72(-37m^2 + 140m - 132), t_0 = (37m - 66)^2, b_0 = -36(76m^2 - 120m) \\ f_0 &= -36(-76m^2 + 272m - 240), d_0 = -4(703m^2 - 2364m + 1980) \\ c_0 &= (38m - 60)^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 36m^2, \theta_1 = -108m, r_1 = -(m^2 - 30m + 72), \delta_1 = -(37m^2 - 29m - 66) \\ t_1 &= 38m^2 - 60m, b_1 = 38m^2 - 22m - 60 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\tau_{ro} = \rho U_{r*}^2, \quad \tau_{\theta o} = \rho U_{\theta*}^2, \quad I_r = -\frac{\partial}{\partial r}(h + \varepsilon) \quad (23)$$

つぎに式(1)の第3式，すなわち連続方程式の中の積分を実行するについて，式(17)の U_r をそのまま用いることは適当でない。何故ならこの U_r は式(12)を恒等的に満足するからである。そこでこの U_r の代りに，式(12)において I_{ro} の代りに I_r とおいた場合の U_r を用いることにする。式(1)の第3式は，

$$C_m \frac{\partial}{\partial \theta}(h U_{\theta*}) + A_m \left\{ \frac{h^2 I_r}{U_{\theta*}} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h^2 I_r}{U_{\theta*}} \right) \right\} + B_m \frac{\partial}{\partial r}(h^2 U_{\theta*}) = 0 \quad (24)$$

ここに， $A_m = 2g/k$ ， $B_m = (17m^2 + 30m + 36)/(18k^2 m^2)$ ， $C_m = 1/km$ とする。簡単のために，式(24)の左辺大括弧内第2項の I_r を式(14)の I_{ro} に近似する。さらに変数 r ， θ および未知量 h ， $U_{\theta*}$ ， U_{r*} などの代りにつぎのような無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{r_o} &= x, & \frac{\theta}{\theta_o} &= y, & \frac{h}{h_o} &= \psi, & \frac{\varepsilon}{h_o} &= \zeta \\ \frac{U_{\theta*}}{\sqrt{g h_o}} &= \sigma_o, & \frac{U_{r*}}{\sqrt{g h_o}} &= \sigma_r, & \psi \sigma_o &= u \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ただし， h_o は彎曲部始端断面における水路中央の水深， r_o は水路中央彎曲曲線の曲率半径， θ_o はその彎曲部分の中心角とする。また式(25)の最後の関係によつて σ_o は無次元量 u によつて代表されるものとする。 $\cos \alpha \approx 1$ とすると，式(14)および(15)はそれぞれ，

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^2 &= P_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{\psi u^2}{x^3} + R_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{u^2}{\psi x} - \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \psi \frac{\partial \zeta}{\partial x} - 2 P_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{\psi u}{x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\quad - \frac{2 Q_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) u}{\sigma_o} \frac{\partial u}{\partial y} - \left\{ P_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{u^2}{x^2} + \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \psi \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 2 Q_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2 R_m}{\sigma_o} \frac{u}{\psi} \frac{\partial u}{\partial y} + \left\{ -\frac{R_m}{\sigma_o} \left(\frac{u}{\psi} \right)^2 + \frac{\psi}{\sigma_o} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= J_o \left(\frac{r_o}{h_o} \right) x \psi - \left(\frac{r_o}{h_o} \right) x \left(\frac{u}{\psi} \right)^2 - Q_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{u^2}{x} \\ \frac{C_m}{\sigma_o} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{k} \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{\psi^3}{u} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -B_m \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{u \psi}{x} + \frac{2}{k} \left(\frac{h_o}{r_o} \right) \frac{\psi^3}{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(26)は三個の未知量 u ， ψ ， σ_r に関する非線形一階の聯立偏微分方程式であり，以後の解析の基礎方程式である。

2. 特性曲線法による解

式(26)によると，未知量 σ_r はその式の第1式以外には含まれていない。したがつて，式(26)の第2および第3式を残りの2個の未知量 u および ψ の方程式とみて，その解をうれば，これらの解を式(26)の第1に代入して未知量 σ_r をうることができ，問題を解決することが可能である。

いま新しい量 ρ ， θ ， r ， s および ρ_* ， r_* ， s_* を導入し，それぞれ式(26)の第2式の左辺に含まれる $\partial u / \partial x$ ， $\partial u / \partial y$ ， $\partial \psi / \partial y$ の係数とその右辺，および第3式の左辺に含まれる $\partial u / \partial y$ ， $\partial \psi / \partial x$ の係数とその右辺とすると，次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{\partial u}{\partial y} \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} r &= s \\ \frac{\partial u}{\partial y} \rho_* + \frac{\partial \psi}{\partial x} r_* &= s_* \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(20)の第1式の両辺に未知量 β をかけ、その式から第2式の両辺を辺々さしひいて得られた式がある量の方向微分になるという条件から β はつぎのように2個決定される。

さらに，この場合の特性方程式 $C_+(\beta_+)$ ， $C_-(\beta_-)$ は，それぞれ，

式(3)のそれぞれを差分方程式にかきかえることにより，つぎのようにその数値解をうる。

A diagram of a three-dimensional stress element, a rectangular prism with dimensions Δx , Δy , and Δz . The faces are labeled with normal stresses P_x , P_y , and P_z . The faces perpendicular to the x -axis are labeled with shear stresses C_x and C_{-x} . The faces perpendicular to the y -axis are labeled with shear stresses C_y and C_{-y} . The faces perpendicular to the z -axis are labeled with shear stresses C_z and C_{-z} . The faces are also labeled with their respective dimensions: Δx , Δy , and Δz . The faces are also labeled with their respective dimensions: Δx , Δy , and Δz .

☒ -2

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{ru} &= \frac{1}{f_{ru} - f_d} (n_o - m_o f_d) \\ \Delta y_{ru} &= \frac{f_{ru}}{f_{ru} - f_d} (n_o - m_o f_d) \\ \Delta \psi_{ru} &= \frac{\Delta x_{ru} (\ln g_d - \ln g_{ru})}{(\ln S_d - \ln S_{ru})} - \frac{\ln \{ m_o g_d + \ln (u_u - u_d) + S_d (\psi_u - \psi_d) \}}{(\ln S_d - \ln S_{ru})} \\ \Delta u_{ru} &= \frac{g_{ru} \Delta x_{ru}}{l_u} - \frac{S_{ru}}{l_u} \Delta \psi_{ru} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} f_{+u} &= \left\{ \frac{k}{2\theta_0} \left(\frac{r_0}{h_0} \right) - \frac{u\beta_+}{\psi^5} (-R_m u^2 + \psi^3) \right\} u \\ g_{+u} &= \left\{ J_{00} \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^2 \psi^3 - \left(\frac{r_0}{h_0} \right)^2 \chi^2 u^2 - Q_m u^2 \psi^2 + B_m \frac{u\psi^3}{\beta_+} - \frac{2}{k} \frac{\chi\psi^5}{u\beta_+} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right\} u \\ S_{+u} &= \left(\frac{2}{R} \frac{\psi^5 \chi}{u\beta_+} \right) u, \quad L_u = 2Q_m (\psi^2 \chi u) u \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ただし、 f_d, g_d, S_d はそれぞれ上式 f_{+u}, g_{+u}, S_{+u} において β_+ の代りに β_- を用いた場合の点 P_d の値をとる。以上によつて各未知点の値 u および ψ は順次決定されるわけであるが、他の未知量 σ_f については以上の計算が終了した後つぎのように計算する。

式(27)の第3式を $\partial u / \partial y$ について解き、その式の第1式に代入して、点 P_d の値を求めると、

$$\begin{aligned} (\sigma_f)_d &= \left(P_m + \frac{2Q_m B_m}{C_m} \right) \left(\frac{h_0}{r_0} \right)^3 \left(\frac{u^2 \psi}{\chi^3} \right)_d + R_m \left(\frac{h_0}{r_0} \right) \left(\frac{u^2}{\psi \chi} \right)_d - \left[\left\{ \psi + \frac{4Q_m}{C_m k} \left(\frac{h_0}{r_0} \right)^2 \frac{\psi^3}{\chi^2} \right\} \left(\frac{h_0}{r_0} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right]_d \\ &\quad - 2P_m \left(\frac{h_0}{r_0} \right)^3 \left(\frac{\psi u}{\chi^2} \frac{\partial u}{\partial \chi} \right)_d - \left[\left\{ \frac{4Q_m}{C_m k} \left(\frac{h_0}{r_0} \right)^3 \frac{\psi^3}{\chi^2} + P_m \left(\frac{h_0}{r_0} \right)^3 \frac{u^2}{\chi^2} + \left(\frac{h_0}{r_0} \right) \psi \right\} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right]_d \end{aligned} \quad (35)$$

つぎに、図-2において点 P_d から発進する二つの特性曲線 C_d, C_{+d} に注目し、微小線分長 $\overline{P_d P_{d+}}$ および $\overline{P_d P_i}$ をそれぞれ Δt_{+d} および Δt_d とすると、方向微分の性質によつて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta u_{+d}}{\Delta t_{+d}} &\equiv \cos \alpha_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_d + \sin \alpha_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_d \\ \frac{\Delta u_d}{\Delta t_d} &\equiv \cos \alpha_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_d + \sin \alpha_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_d \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \psi_{+d}}{\Delta t_{+d}} &\equiv \cos \alpha_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_d + \sin \alpha_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_d \\ \frac{\Delta \psi_d}{\Delta t_d} &\equiv \cos \alpha_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_d + \sin \alpha_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_d \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式(36)および(37)をそれぞれ $(\partial u / \partial x)_d, (\partial u / \partial y)_d$ および $(\partial \psi / \partial x)_d, (\partial \psi / \partial y)_d$ について解き、これらを式(35)に代入すると、各格点の σ_f が決定される。計算結果の一部は講演時に発表する。

以上の計算は著者が1967年米国ミネソタ大学滞在中に行つたものの一つで、関係主任教授A.G. Anderson におうところが多い。ここに厚く謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) I.R. Rozovskii; Flow of Water in Bends of Open Channels, Translated from Russian, 1961
- 2) A.I. Ippen, P.A. Drinker, W.R. Jobin, and G.K. Noutsopoulos; The Distribution of Boundary Shear Stress in Curved Trapezoidal Channel, Technical Report No. 43, 1960.
- 3) 松梨順三郎; 開水路彎曲部流れの水利特性について, 土木学会第24回年次学会講演集, P121, 1969.
- 4) A.I. Ippen, P.A. Drinker, W.R. Jobin, O.H. Shewdin; Stream Dynamics and Boundary Shear Distribution for Curved Trapezoidal Channels, Report No. 47, 1962.