

重複波の中におかれた球状物体の振動

東京工業大学 工学部 正員 椎 貝 博 美

〃

○ 河 野 二 夫

1 まえがき

水中構造物が波動によってどのような影響を受けるかといった問題について、著者らは何つかの論文を発表した。これまでに球状物体の振動について研究した結果明らかになったことは大体次の様なことである。①：波の進行方向の振動（以下X振動）と波の進行に直角方向の振動（以下Y振動とする）が存在する¹⁾ ②：X振動の外力として水圧変動が主要因と思考される¹⁾ ③：Y振動では $\frac{\omega}{\omega_0}$ （ ω ：波の振動数， ω_0 ：振子の固有振動数）が0.4程度以下では $\frac{\omega}{\omega_0}$ （ ω_0 ：振子の振動数）=1であるが，0.4程度以上になると $\frac{\omega}{\omega_0} = 2$ ，またはそれ以上になる¹⁾ ④：波動による球の剥離点は時間的に移動する²⁾ ⑤：剥離点を固定すると固定の仕方ではY振動は減少する²⁾ ⑥：2箇の球の間隔を小さくすると干渉の効果が表われる³⁾ ⑦：X振動では2箇の球が同一の場合上流側より下流側の球の振巾が，その球の中心間隔の小さい程小さくなる³⁾ ⑧：2箇の球が接近すると，下流側の球の共振点は（上下流の球がほぼ同一の場合） $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ の点より移動し大きな値になる³⁾

本論文は構造物が直立壁の場合で，波が定常波の場合の球の振動実験，および理論的な考察を行なったものである。実験装置や実験方法などについては，前論文とほぼ同じであるので省略する。

2 記号の説明

本文中で用いる主な記号の説明を次に示す。（C. G. S 略位）

E：運動エネルギー。	k：ばね定数。	2q：C/M+m。	F _k ：一般力。
U：ポテンシャルエネルギー。	ω_0 ：固有角振動数。	a：球の半径。	h：平均水深。
q _k ：一般座標。	C：減衰係数。	d：球の直径。	H：波高。
F：dissipation function。	M：球の質量。	u：球の移動速度。	L：波長。
t：時間。	m：球の仮想質量。	g：重力の加速度。	T：周期。
ϕ ：速度ポテンシャル。	ρ ：水の密度。	C _D ：抵抗係数。	$\varepsilon : \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3$
r ₀ ：静止している球の中心と壁との間隔。		r：運動している球の中心と壁との間隔。	

3 基礎方程式

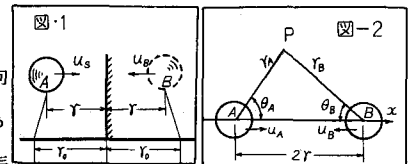
減衰力，および保存力以外の一般力 F_k も考えた時の Lagrange の運動方程式は(1)式で与えられる⁴⁾

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = P_k \quad (1)$$

4 運動エネルギー

本論文の具体的内容は，図-1 に示すように，A 球が壁の方向に運動する場合に球の運動が壁によってどのような影響を受けるかと云った問題と，とくに流体が波動運動している場合に球の振

動はどの様になるかと云った問題である。前者の如き問題については，Lamb や M Thomson の流体力学の本に紹介されている^{5,6)} が説明の便宜上簡単に記しておく。図-2 で2箇の球による速度ポテンシャル ϕ を(2)式とする。



$$\phi = U_A \phi_A + U_B \phi_B \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{境界条件は(3)式で示せる。} \quad A \text{ 球上で: } \left. \frac{\partial \phi_A}{\partial r_A} \right|_{r_A=a} = U_A \cos \theta_A, \quad \left. \frac{\partial \phi_B}{\partial r_A} \right|_{r_A=a} = 0 \\ B \text{ 球上で: } \left. \frac{\partial \phi_B}{\partial r_B} \right|_{r_B=b} = U_B \cos \theta_B, \quad \left. \frac{\partial \phi_A}{\partial r_B} \right|_{r_B=b} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

上式の suffix A, B は各々 A 球, B 球に対応する。A 球だけについての速度ポテンシャルを単位速度について ϕ_1 とすると, ϕ_1 は(4)式になる。

$$\phi_1 = -\frac{a^3}{2r_A^2} \cos \theta_A \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{さて, } r_A, r_B, r, \theta_B \text{ の間には(5)式が成立する。} \quad \left. \begin{aligned} r_A^2 &= 4r^2 - 4r \cdot r_B \cos \theta_B + r_B^2 \\ 2r &= r_A \cos \theta_A + r_B \cos \theta_B \end{aligned} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

従って(4), (5)式により B 球附近の ϕ_1 による速度ポテンシャルが得られる。B 球附近では近似的に $r_A = 2r$ と仮定すると(3)式により, B 球上の境界条件を万足するような速度ポテンシャル ϕ_2 が得られる。従って ϕ_2 までの近似では $\phi = \phi_1 + \phi_2$ となる。B 球についても同様にして得られるので, 結局 ϕ は(6)式になる。

$$\phi = U_A \left\{ -\frac{a^3}{2r_A^2} \cos \theta_A - \frac{a^3 b^3}{16r^3} \frac{\cos \theta_B}{r_B^3} \right\} + U_B \left\{ -\frac{b^3}{2r_B^2} \cos \theta_B - \frac{a^3 b^3}{16r^3} \frac{\cos \theta_A}{r_A^3} \right\} \quad (6)$$

$$\text{流体の運動エネルギーは } E = -\frac{\rho}{2} \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{1}{2} m_A \cdot U_A^2 + \frac{1}{2} m_B U_B^2 + \frac{\rho \pi a^3 b^3}{4r^3} U_A \cdot U_B \quad (7)$$

ただし n : 球表面の法線方向の成分, S : 球の表面積である。

5. 振動方程式

(7)式は 2 箇の球が互に逆方向に運動するときの流体の運動エネルギーを示すが, 図-3 の様に一個の球が壁に向って運動する場合は, 他方の球は鏡像の関係にあるから(7)式で $m_A = m_B = m$, $U_A = U_B = u$, $b = a$ とおくと(7)式は(8)式になる。

$$E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{\rho \pi a^3}{8r^3} u^2 = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{3a^3}{8r^3} \right) u^2 \quad (8)$$

さて(8)式の r は図-3 により, $r_0 - x$, であり, かつ(1)式の U , F , P_k は(9)式で与えられる⁴⁾

$$r = r_0 - x, \quad F = \frac{1}{2} G \dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2} k x^2, \quad P_k = p(t) \pm \varepsilon' (\dot{x} - u')^2 \quad (9)$$

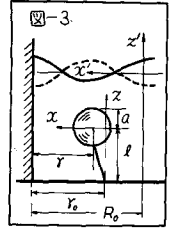
ただし, u' は水粒子の水平速度成分, ε' は比例定数で $\varepsilon' = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot \pi a^2$ である。結局球自身が運動するときの運動エネルギー, $E' = \frac{1}{2} M u^2$, を考えて(8), (9)式を(1)式に代入すると(10)式になる。

$$\ddot{x} + \frac{2q}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} x + \frac{9}{16} \frac{\left(\frac{a^3}{r_0 - x} \right)^3 \frac{m}{M+m}}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} \dot{x}^2 = \frac{P_k / M + m}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} \quad (10)$$

ただし $A = \frac{3\pi a^3}{8(M+m)}$ であり, かつ(8)式の u は $\dot{x}$ におき換えた。ここで $\dot{x}$, $\dot{x}$ は時間に関する 1 回, および 2 回微分を示す。さて(10)式の左辺第 4 項は他の項に比較して小さいとして, これを無視すると(10)式は(11)式になる。Basset は粘性流体の中の球の非定常問題で $\dot{x}$ が大きいと球のまわりに発生する熱量が流体を蒸発するため, 問題の事情が初めと異なる。従って $\dot{x}$ の 2 乗やその積は省略し得る場合

$$\ddot{x} + \frac{2q}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} x = \frac{P_k / M + m}{1 + \left(\frac{A}{r_0 - x} \right)^3} \quad (11)$$

を仮定している⁷⁾



6. 振動方程式の解

6-1) P_k について

図-3に対する波形と波の速度ポテンシャル

$\bar{r}$ は $z' = \ell - h + z$, $x' = x + R_0 - r_0$ とすると

$$\eta = \frac{H}{2} \sin \frac{2\pi}{L} (x + R_0 - r_0) \cos \omega t$$

$$\phi = \frac{-H\omega L}{4\pi} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin \frac{2\pi}{L} \{x + R_0 - r_0\} \sin \omega t \quad (12)$$

ただし, ω は波の振動数である。波動では r_0 は(13)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= L(n + n'), \\ \text{ただし, } n &= 0, 1, 2, \dots, 0 < n' < 1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

図-4により P を変動水圧とすると, (9)式の $P(t)$ は(14)式になる。

$$P(t) = \int_s p' ds = \int_s \int_{-a}^x -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx ds$$

$$= \frac{L}{2\pi} \rho H \omega^2 \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \cos \omega t \int_s \left\{ \sin \frac{2\pi}{L} (x + R_0 - r_0) - \sin \frac{2\pi}{L} (R_0 - r_0 - a) \right\} ds \quad (14)$$

球径は波長に比較して余り大きくないとすると

$$\sin \frac{2\pi}{L} (x + R_0 - r_0) \div \sin \frac{2\pi}{L} (R_0 - r_0) + \frac{2\pi}{L} x \cdot \cos \frac{2\pi}{L} (R_0 - r_0) \quad (15)$$

故に $x = -a \cos \theta$, $ds = 2\pi a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta$ であるから

$$P(t) = -\frac{2}{3} \rho \pi^2 a^3 \frac{H}{T^2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \left\{ \cos \frac{2\pi}{L} R_0 \cos 2\pi n' + \sin \frac{2\pi}{L} R_0 \sin 2\pi n' \right\} \cos \omega t. \quad (16)$$

さて, R_0 は適当に選べるので, $R_0 = nL + \frac{L}{4}$ と仮定すると,

$$P(t) = \frac{1}{3} \rho \pi^2 a^3 \frac{H}{T^2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin 2\pi n' \cdot \cos(\omega t + \pi) \quad (17)$$

(17)式は $P(t) = P_0 \cdot \cos(\omega t + \pi)$ とおきかえると

$$\bar{R} = \frac{P_0}{1/3 \cdot \rho \cdot \pi^2 \cdot a^3 \cdot \frac{H}{T^2}} = \sin 2\pi n' \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \quad (18)$$

$$\text{または, } \bar{P}_0 = \frac{P_0}{1/3 \cdot \rho \cdot \pi^2 \cdot a^3 \cdot \frac{H}{T^2} \cdot \sin 2\pi n' \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h}} \quad (19)$$

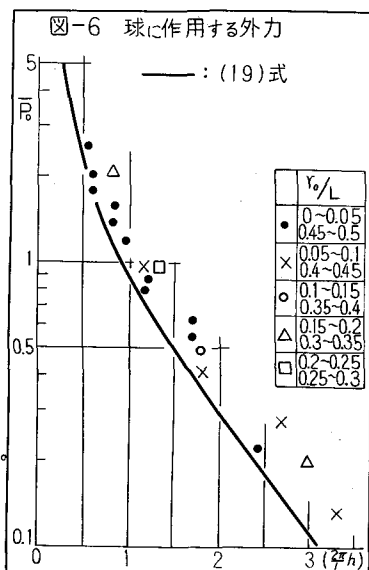
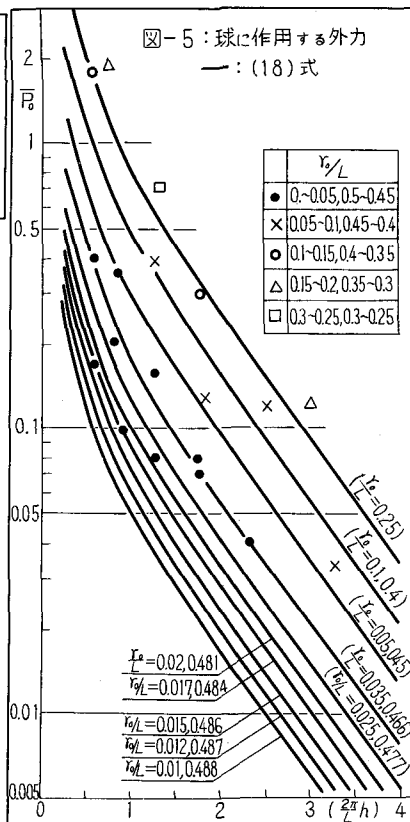
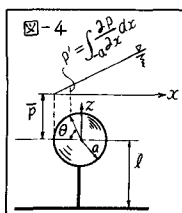
つぎに(9)式の U の値は(12)式により(20)式になる。

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \cos \frac{2\pi}{L} (x + R_0 - r_0) \cdot \sin \omega t \quad (20)$$

(20)式で $R_0 = nL + \frac{L}{4}$, $r_0 = L(n + n')$ とすると(21)式が得られる。

$$u' = -\frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin 2\pi n' \cdot \sin \omega t \quad (21)$$

ただし $\frac{2\pi}{L} x \ll 1$ と仮定する。



(18) 式, (19) 式による実験値との比較を図-5, 図-6 に示した。図で理論と実験は比較的一致する。

6-2) 振動方程式の解

(11) 式で分母を(22) 式の様におく。

$$f(x) = 1 + \frac{A}{(x_0 - x)^2} = R_0 + 6 \varepsilon \frac{x}{r_0} + 12 \varepsilon \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \dots = R_0 + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{x}{r_0}\right)^{n-1} \quad (22)$$

(22) 式で, x_0, x, a の間には $\frac{a}{r_0} + \frac{x}{r_0} < 1$, の関係があり, かつ $\varepsilon = \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3$ であるから, R_0 対 ε の各項は充分小さく, また (22) 式は収斂する式である。(22) 式によって (11) 式は (23) 式に書き

$$\text{換えられる。} \left\{ R_0 + 6 \varepsilon \frac{x}{r_0} + 12 \varepsilon \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + 20 \varepsilon \left(\frac{x}{r_0}\right)^3 + \dots \right\} \ddot{x} + 2q \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_k}{M+m} \quad (23)$$

$$\text{また (18), (21) 式により } \frac{P_k}{M+m} = \frac{P_0}{M+m} \cos(\omega t + \pi) \pm \varepsilon \frac{4C_D}{a^4} r_0^3 \left\{ \dot{x} + \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin 2\pi n' \cdot \sin \omega t \right\}^2 \quad (24)$$

さて, (23) 式の解として (25) 式を仮定する。

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n \quad (25)$$

$\varepsilon^n x_n$ は n' 次の近似解である。(25) 式を (23) 式に代入すると,

$$\varepsilon = 0 \text{ の場合 } R_0 x_0 + 2q \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \frac{P_0}{M+m} \cos(\omega t + \pi) \quad (26)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^1 \text{ の場合 } R_0 x_1 + 2q \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\left(\frac{6x_0}{r_0} + \frac{12}{r_0^2} x_0^2 + \dots\right) x_0 \pm \frac{4C_D}{a^4} r_0^3 \left\{ \dot{x}_0 + \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin 2\pi n' \cdot \sin \omega t \right\}^2 \quad (27)$$

など以下順次方程式は得られる。

6-2-1) 自由振動

(26) 式で $R_0 = 0$ とし, $t=0$ のとき $x_0 = X_0, \dot{x}_0 = 0$ と

$$\text{すると } x_0 = X_0 \cos \omega_1 t, \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{R_0}} \sqrt{1 - \frac{1}{R_0} \frac{q^2}{\omega_0^2}} \quad (28)$$

$$\text{および } \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 + \frac{C^2}{4\omega_1^2 \left(1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right) (M+m)^2}} \quad (29)$$

(29) 式の減衰項を省略して実験値と比較したものが図-7 である。こゝで ω_1 は振子が壁に近づいた場合の振動数を示めす。同様の研究が円筒について行なわれている⁸⁾

6-2-2) 重複波による振動

1) $\varepsilon = 0$ の場合

(26) 式によって

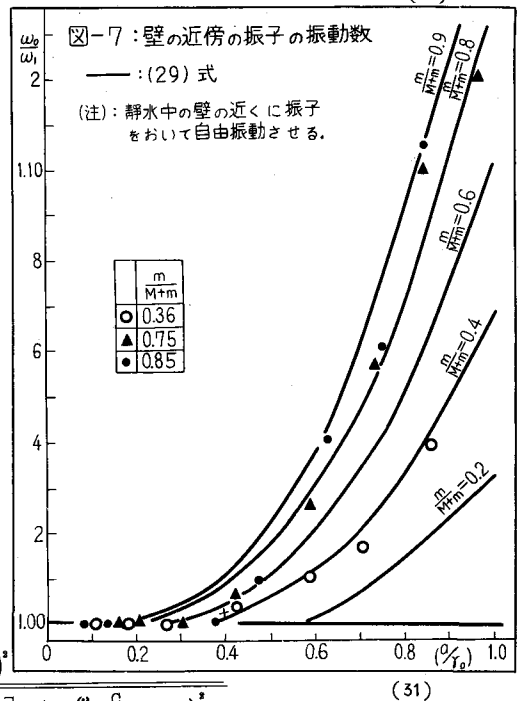
$$x_0 = X_0 \sin(\omega t + \beta) \quad (30)$$

$$\tan \beta = \frac{1 - R_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{C\omega / \omega_0^2 (M+m)}$$

$$\bar{X}_0 = \frac{x_0}{H \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h}} = \frac{\frac{m}{M+m} \cdot 2\pi n' \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{8} \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left\{\frac{\omega \cdot C}{\omega_0^2 \cdot (M+m)}\right\}^2}} \quad (31)$$

(13) 式により $\sin 2\pi n' = \sin 2\pi \left(\frac{r_0}{L} - n\right), n = 0, 1, 2, \dots = \sin \frac{2\pi}{L} r_0$, かつ減衰項を無視して (31) 式を調べたものが図-8 ~ 図-10 である。また実験値と比較するため (31) 式を (32) 式に書きかえた。

$$\bar{X}_0 = \frac{12(M+m) \cdot x_0}{\rho \pi H d^3 \sin 2\pi n' \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h}} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{8} \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left\{\frac{\omega \cdot C}{\omega_0^2 \cdot (M+m)}\right\}^2}} \quad (32)$$



(32)式と実験値の比較をしたのが図-11 である。

図-7, および図-11によると実験値と理論は比較的一致している。

図 8, 9

では L を一定にして r_0 を小さくすると振巾は減少することを示す。

つきに $\varepsilon = 0$ の場合の共振曲線につき述べると, $X_{st} = \frac{F_0}{k}$,

$$\alpha = \left(\frac{m}{M+m} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{r_0} \right),$$

$$\zeta = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2(M+m)\omega_0} \text{ と}$$

して(18),(31)式により $\frac{|x_0|}{|x_{st}|} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{8}\alpha^2\right)\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (33)$

(33)式の関係を図-12に示した。図によると, α が増大する (a, r_0 を一定にすると, $\frac{m}{M+m}$ が増大する) と増巾率は大きくなる。

(注: X_{st} の中に $\sin 2\pi n' = \sin \frac{2\pi r_0}{L}$ が含まれているのに注意)。

また(30)式により
$$\tan \beta = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{8}\alpha^2\right\}}{2\zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (34)$$

(34)式と実験値の比較を図-13に示した。(ページ数の都合で本文では省略)

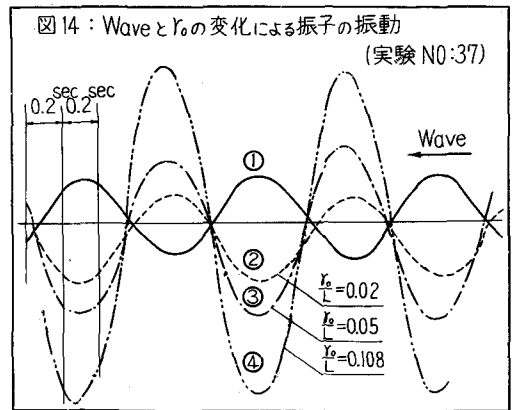
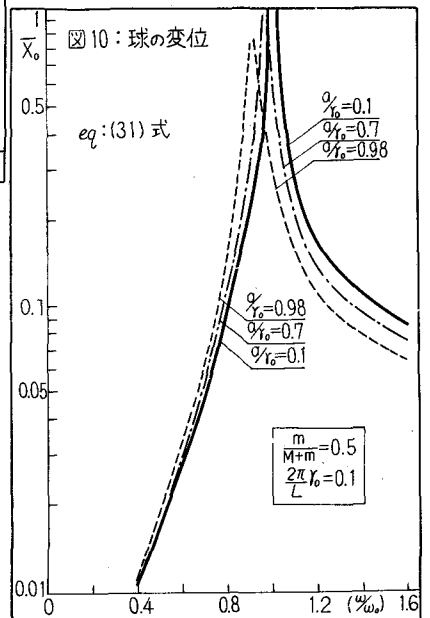
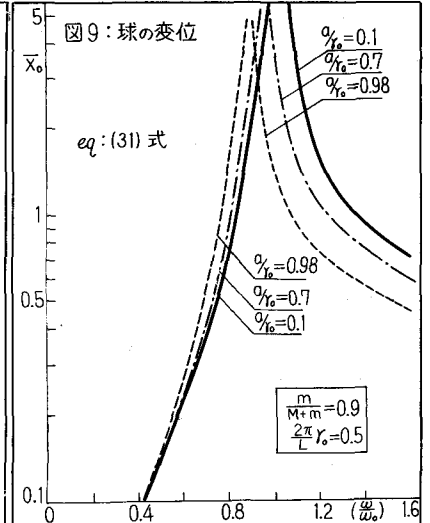
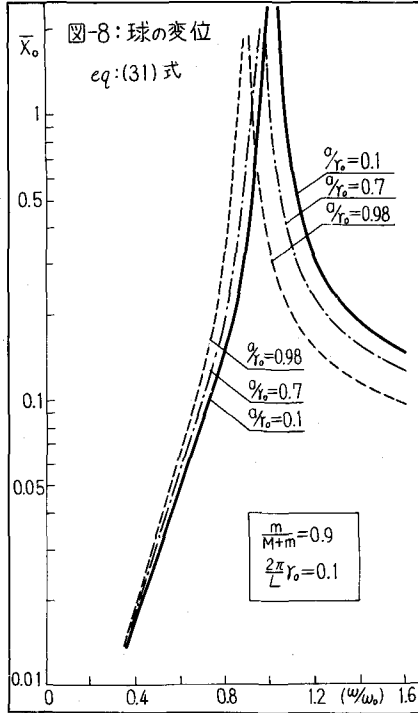
II) $\varepsilon = \varepsilon'$ の場合

(22)式で $n = 2$ の場合の近似で取扱い, かつ(27)式の c_D に関する項も無視したとき(本文では出来るだけ理解しやすい解にするため)は方程式は(35)式になる。

$$M\ddot{x}_1 + 2q\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{6\omega_0^2}{r_0} \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t + \beta) \quad (35)$$

故に $x_1 = \frac{3x_0}{r_0} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{3x_0}{r_0} \cdot \frac{(\frac{\omega}{\omega_0})^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{4\omega^2}{\omega_0^2} F_0\right)^2 + \left(\frac{4q\omega}{\omega_0^2}\right)^2}} \sin\left\{2(\omega t + \beta) + r\right\} \right) \quad (36)$

$$\tan \beta = \frac{1 - \frac{2\omega^2}{\omega_0^2} F_0}{4q\omega/\omega_0^2} \quad (37)$$



故に $\varepsilon = \varepsilon'$ の近似では x は (38) 式になる。

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 = x_0 \sin(\omega t + \beta)$$

$$+ \frac{3}{16} \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \left\{ \frac{3x_0}{r_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left[1 + \frac{\sin \{ 2(\omega t + \beta) + \gamma \}}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\omega_0^2} \cdot F_0} + \frac{4q\omega^2}{\omega_0^2}} \right] \right\}$$

ただし $F_0 = 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3$ である。 (38)

(38) 式によると共振点が 2 ケ所現われることになる。

7. 波形について

(31) 式に対する実験的考察として一例を図 14 に示した。

図-14 の実験内容の概要を下表に示す。

波 形				振 子				波 形① は振子 の振動 ③のと きのも Q
記号	T (sec)	H (cm)	L (cm)	$\frac{m}{M+m}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$	外力 (dyn)	振巾 (cm)	$\frac{r_0}{L}$
①	0.98	8.5	14.2	-	-	-	-	-
②	1	8.8	14.6	0.75	0.212	1.34×9.80	0.031	3
③	①に同じ			0.75	0.216	$2.48 \times$	0.058	7
④	0.97	6.9	13.9	0.75	0.219	$5.07 \times$	0.12	15

8. 結論

- ①：壁の近くで振子を振動させると、壁との距離が近い程振動数は減少する。(図・7)。
- ②：波長が同じとき重複波の中では、振子を壁に近づける程振巾は減少する。(図8, 図9)。
- ③： r と a を一定にして M を増すと $\frac{\omega}{\omega_0}$ は増す(図7)。
- ④： L と r が一定のとき $m/M+m$ の値を小さくすると振巾は小さくなる。(図8, 図10)。
- ⑤：振子の振動は主に水圧変動が外力として作用する。(図5, 図6)。

9. 参考文献

- 1) 椎貝, 河野: study on vibration of submerged spheres caused by surface waves; (CEJ投稿)
- 2) 椎貝, 河野, 山崎: 水中におかれた球状物体の振動と防振法; 第24回年次講演会。
- 3) 椎貝, 河野: 水中におかれた球状物体の干渉; 東工大研究報告(昭和45年2月予定)
- 4) 高橋利衛: 振動工学演習(Ⅱ); オーム社。
- 5) H. Lamb: Hydrodynamics; (p130~P134)
- 6) M. Thomson: Theoretical Hydrodynamics (P525~)
- 7) A. B. Basset: on the Motion of a sphere in a viscous liquid; Phi. Trans. Royal soc. vol 43 (1883)。
- 8) 河野長正: 仮想質量の円筒境界の干渉; 第1回流体力学講演会, 昭和44年11月。

