

Burgers 乱流における乱れのエネルギー輸送について

東京工業大学 工学部 日野 幹雄

要旨： 流体運動を記述する方程式 — Navier-Stokes の方程式 — をその非線型性，非定常性など乱流的特性が失われない範囲において，最も簡単化した Burgers 方程式を境界値問題として取り扱い，壁面近くの乱流エネルギーの輸送機構を検討した。

はじめに

流体の特質は変形が自由である連続体ということであり，これを記述する方程式が Navier-Stokes の方程式と連続の方程式である。この方程式は非線型であり，解の唯一性，一価性が数学の立場から問題となっている。乱流過程も，この方程式の非線型性にもとづく解の多価性，不安定性によるものである。こうした乱流の特性を保存しつつ，N-S 方程式を最も単純化したのが，次式で表わされる Burger 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここに， t ・ x は時間および場所を表す独立変数， u は速度， ν は動粘性係数である。

さて，この非線型方程式の初期値問題の解は，Hopf(1950)とCole(1951)により独立に求められた。Hopfはこの方程式の解をすでに発表の数年前から気付いていたが，本来原子物理学者である彼は，これが流体力学にそれほど重要とは思われなかったので発表をひかえていたといわれる。一方，Coleはむしろ衝撃波の一次元モデルとしてこの方程式に興味をもった。

Burgers方程式には，流体の運動にとって重要な次の3つの過程が含まれている。

- i) 非線型加速度項の効果により，初めの滑らかな攪乱から狭いエネルギー逸散層の形成，
- ii) 粘性による急峻な不連続の平滑化，
- iii) 粘性と非線型性の結合効果として逸散層の拡大と消滅。

Burgers方程式はその形の単純さにもかかわらず，乱流運動の特質を良く保存しているので，乱流についての新しい理論の正当性を検証するのに良く用いられる。例えば，MeechamらはWiener-Hermite 展開法による乱流理論をBurgers方程式に適用しているし；Hopf汎関数方程式の解法の検証にも用いられている。

このようにBurgers方程式により乱流を論じることが，今を盛りに行われており最近ではBurgers' Turbulenceをもじって"BURBULENCE"とささいう言葉さえできた。

さて，壁面附近では流速分布が急激に変化し，ここで発生する乱れのエネルギーは壁と垂直の方向に輸送され逸散作用によって結局は消滅してしまう。壁面乱流についてはLaufer(1954)の有名な実験があるが，それ以後信頼しうる実験は行われず，われわれの知識は十分とは云えない。そこで，われわれは壁面乱流におけるエネルギー輸送問題をBurgersモデルにより解析することを考えよう。

境界値問題に対する Burgers 方程式の解

Burgers 方程式(1)の初期値問題，すなわち $u(x, 0)$ に対するその後の $u(x, t)$ を求める問題は，すでに述べたように Hopf と Cole により解かれた。しかし，境界値問題，すなわち任意の $u(0, t)$ を与えて各点での $u(x, t)$ を求める問題は未だ解かれていない。

初期乱れが時間とともに，いかに変化するかということは乱流現象の重要な課題であるが，これとともにわれわれには壁面近くの乱流場の理解が必要である。そこで，この問題を次のように間接的に解くことを試みる。

まず，Burgers 方程式を Hopf-Cole 変換により線型熱伝導型の偏微分方程式に帰着させる。この方程式の境界値問題の解はすぐ求まるから，これを逆変換して乱流速度假場の各点の変化を求める。この得られた乱流場は，時間とともに変化するが減衰はしない。しかも壁面上および無限遠点では，乱れがゼロであるという条件を満たしており，一つの定常確率過程にある壁面乱流場が得られる。

Burgers 方程式(1)に

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \{ \ln \theta(x, t) \} \quad (2)$$

の変換をほどこせば， $\theta(x, t)$ に関する熱伝導型の偏微分方程式(3)を得る。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3)$$

式(3)の境界値問題

$$\theta(0, t) = f(t) \quad (x=0) \quad (4)$$

の解は

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \frac{x}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \frac{\exp\{-x^2/4\nu(t-\tau)\}}{(t-\tau)^{3/2}} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{4\nu}{x^2}t} \frac{e^{-1/\eta}}{\eta^{3/2}} f\left(t - \frac{x^2}{4\nu}\eta\right) d\eta \end{aligned} \quad (5)$$

である。さらに，変形すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}x} \int_0^{\frac{4\nu}{x^2}t} \frac{e^{-1/\eta}}{\eta^{3/2}} f\left(t - \frac{x^2}{4\nu}\eta\right) d\eta \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}x} \int_0^{\frac{4\nu}{x^2}t} \frac{e^{-1/\eta}}{\eta^{3/2}} f\left(t - \frac{x^2}{4\nu}\eta\right) d\eta \end{aligned} \quad (6)$$

となる。式(2)より，

$$u(x, t) = -\frac{2\nu}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (7)$$

であり，これに式(5)(6)を代入して (x, t) における Burgers 乱流を計算することができる。

計算結果と検討

上述の諸式により，一つの壁面乱流場を作り統計的性質を調べてみる。

式(5)(6)を矩形積分の形に書き直す。 η のキザミを $\Delta\eta$, t の間隔(サンプリング間隔)を Δt , 一つの乱数の持続時間を Δr とする。もちろん，これらの間には $\Delta\eta < \Delta r, \Delta t < \Delta r$ であることが必要である。乱数は東大大型計算センターのプログラム・ライブラリー「HUN1」を利用して，平均0・偏差1の一様乱数を作った。ここでは，次のような数値について計算した結果を示す。

$$\Delta\eta = 0.10$$

$$\Delta t = 0.01$$

$$\Delta r = 0.10$$

$$\nu = 10^{-2}$$

a) 平均流速と乱れの r.m.s. : 図 - 1 に各点 x における流速 $u(x, t)$ の変化の例を示す。これらもある程度壁面近くの乱流特性がわかる。図 - 2 は壁面からの距離 x と平均流速および乱れの r.m.s. の分布の関係を示す。

図 - 1 に示すように，上述の方法で合成された乱流場は，普通の壁面上で流速ゼロで壁面から遠くで一様流速分布となる流れではなく，図 - 3 に示すような plane Couette flow の乱流(その下半分を採る)である。にもかかわらず，壁面の極く近旁に乱れの強い所があり，それより遠ざかると乱れは急激に減衰している。この様子は J. Laufer の channel flow, pipe flow での実験結果と合致している。

b) 乱れの自己相関関数: 図 - 3 は乱れの自己相関関数を示す。乱れの強い点では自己相関は， δ -関数的であるが，この点より遠くなるにつれて相関関数は滑らかに減ってゆく。

c) 乱れのスペクトル: 自己相関の Fourier 変換から乱れのスペクトルを計算すれば，図 - 4 のようになる。乱れのエネルギーの減衰は各波長について急激に起っているが，壁面近くでは高周波数のところが，特に著しい。しかし，ある程度壁から離れるとスペクトル関数の形は similar に近くなる。高周波数の範囲でのスペクトルの形は，

$$R(f) \propto f^{-n} \quad (8)$$

の関数形となるが，べき数 n の値は homogeneous Burgers turbulence の $n=2$ よりも大きくなっている。

ところで，式(5)(6)を変形すれば，

$$\theta(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-v^2} f\left(t - \frac{x^2}{4\nu v^2}\right) dv \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi} x} \left[\int_{x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-v^2} f\left(t - \frac{x^2}{4\nu v^2}\right) dv - \int_{x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} v^2 e^{-v^2} f\left(t - \frac{x^2}{4\nu v^2}\right) dv \right] \quad (10)$$

となる。したがって、 $x \rightarrow 0$ のとき、

$$u(x, t) \cong -\frac{4\nu}{\sqrt{\pi} x} \left[\int_{x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-v^2} dv - \int_{x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} v^2 e^{-v^2} dv \right] \quad (11)$$

となる。これより、壁面に近づくにつれ平均流速 U は x^{-1} に比例して急激に増加するが、変動成分は無くなることがわかる。これは図 - 1 の結果に他ならない。

また、式(5)(6)の積分において、乱数 $f(\tau)$ は $\Delta \tau$ 区間の間持続するとすれば、 $f(\tau)$ の値が変わるための η のキザミ $\Delta \eta$ の数 N は、 $(x^2/4\nu)(N\Delta \eta) = \Delta \tau$ より

$$N = \frac{4\nu}{x^2} \frac{\Delta \tau}{\Delta \eta}$$

である。したがって、 x が大きくなればそれだけ積分に有効に関与する乱数の数が増え、 t の変化に対する θ 、 $\partial \theta / \partial x$ の変化が小さい。すなわち、 x が大きいほど $u(t)$ の自己相関が強く、逆に x が小さいほど t の値ごとに積分に関与する乱数の数が少なく、ついには t が Δt すすむごとに全く別の乱数が積分に関係する。このため、相関関数は δ -函数的、スペクトルは white noise 的となる。

このように Burgers model による non-homogeneous turbulence の定式化と数値計算の結果は、われわれのもっている non-homogeneous turbulence の image と良く一致し、これを明瞭に理解をさらに深めるものと云える。もっとも、basic flow が図 - 2 に示すように現実の壁面乱流と異っている点は、少々残念である。

今後、乱流場の相互相関や cross-spectrum についても考察をすすめる予定である。

参 考 文 献

- Burgers, J.M. (1948) : A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Appl. Mech.*, vol. 1, 171-199.
- Burgers, J.M. (1964) Statistical problems connected with the solution of a nonlinear partial differential equation, *Nonlinear Problems of Engineering*, ed. W.F. Ames, 123-137.
- Cole, J.D. (1951) : On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.*, vol. IX, No. 3, 225-236.

Hopf, E. (1950) : The partial differential equation, $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Commun. Pure Appl. Math., vol. 3, 201-230.

Jeng, D.T., Foester, R., Haaland, S., & Meecham, W.C. (1966) : Statistical-value problem for Burgers' model equation of turbulence, Phy. of Fluids, vol. 9, ~~№~~ 11, 2114-2120

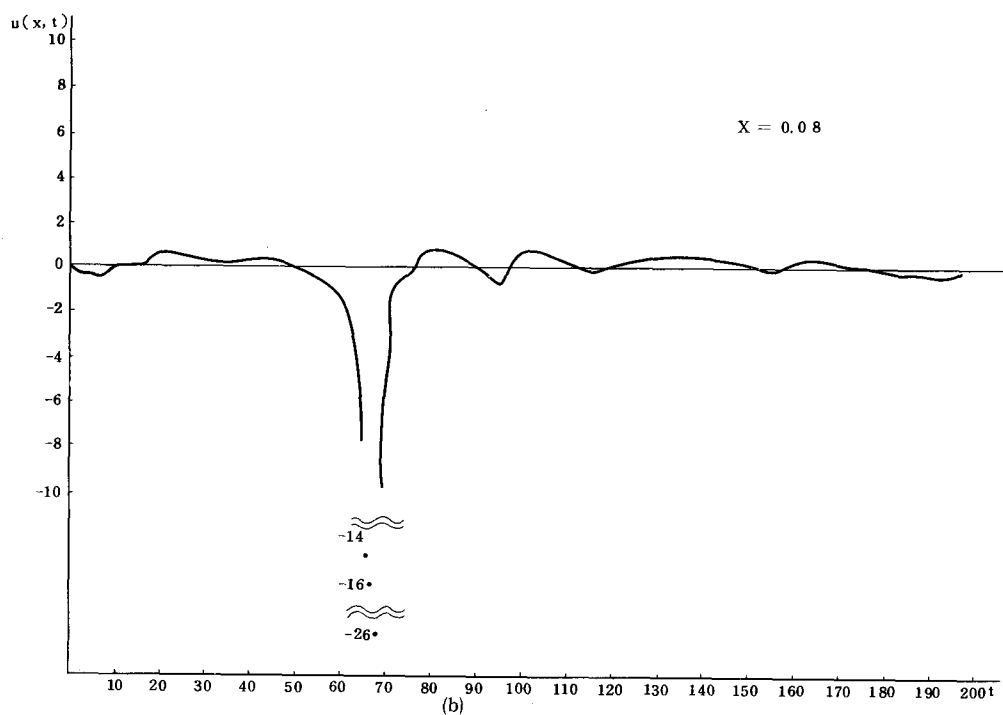
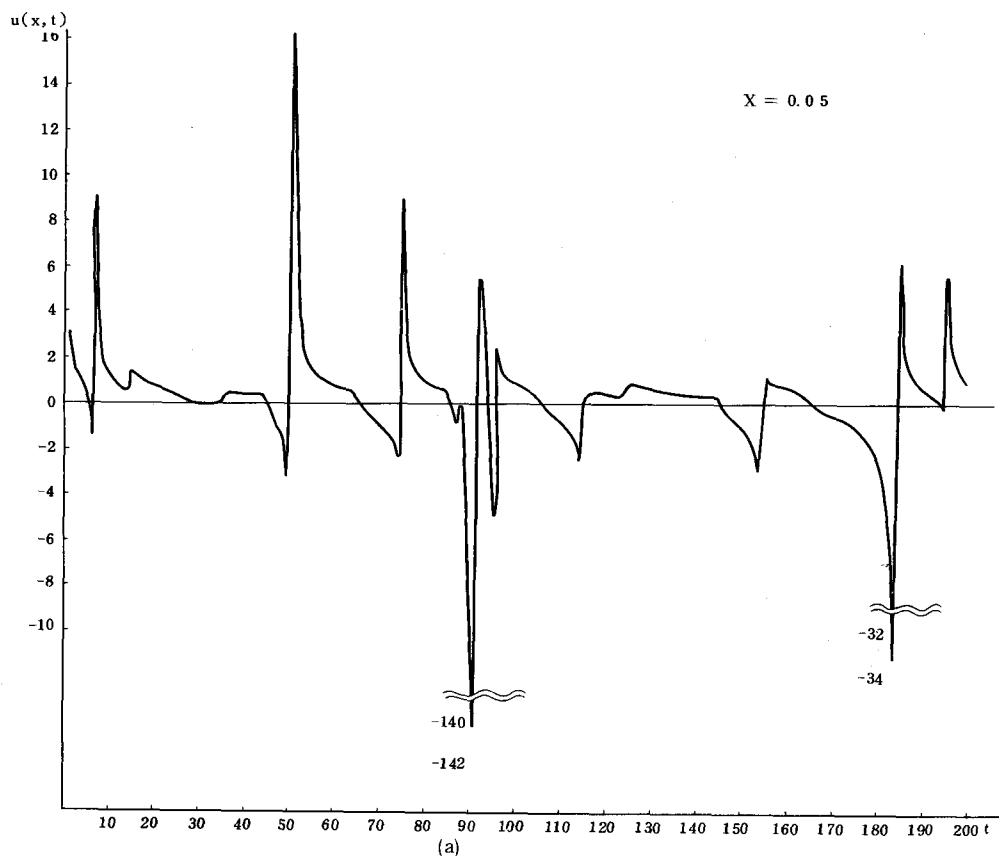


図-1: シミュレーションによる壁面乱流

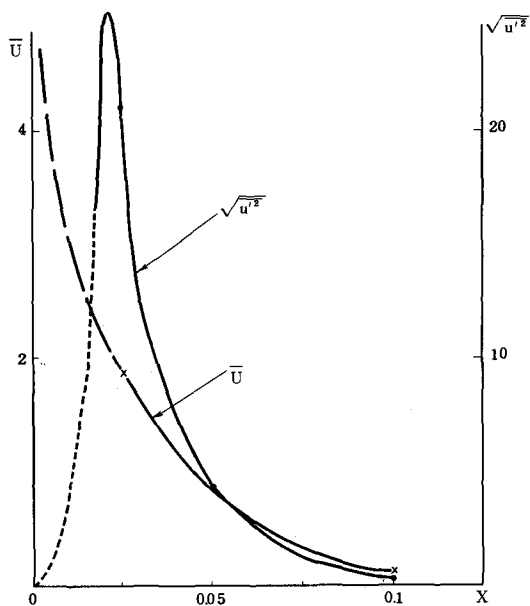


図-2：壁面乱流における平均流速と
乱れの r.m.s. の分布

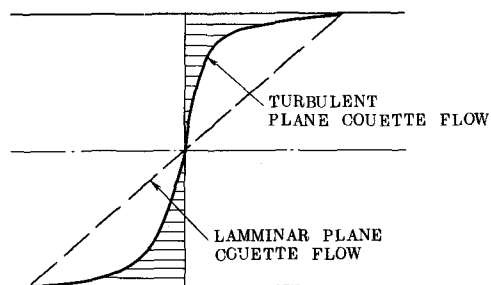


図-3：本論文で取扱った壁面乱流の基本流

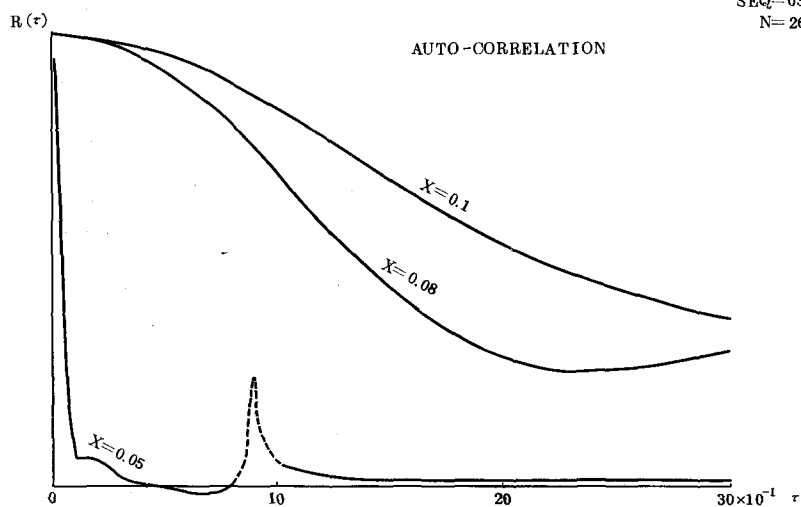


図-4：壁面よりの各点の乱れの自己相関

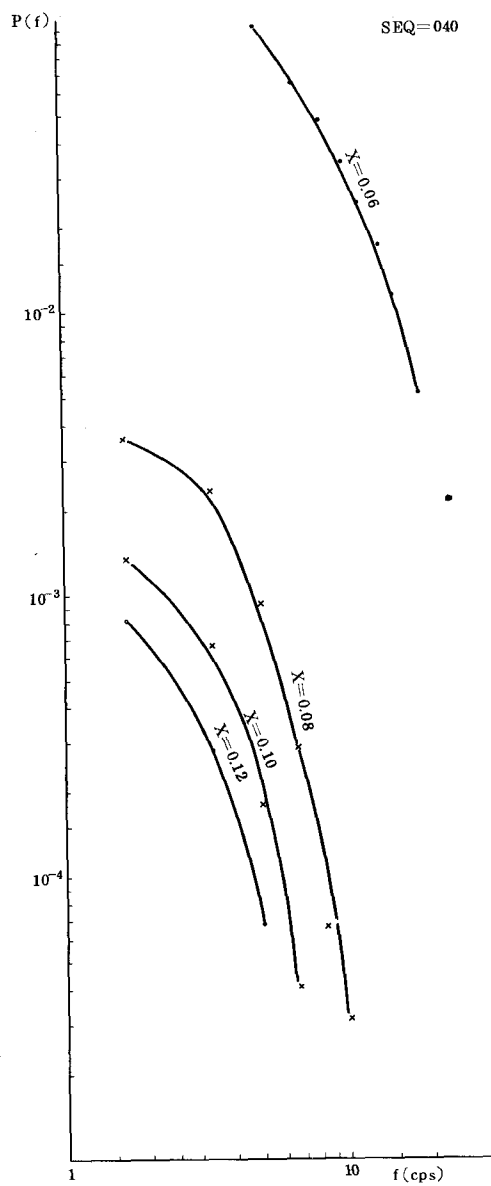


図 - 5 : 乱れのスペクトル