波自身による乱流拡散への試論

東京工業大学 工学部　日野　幹雄

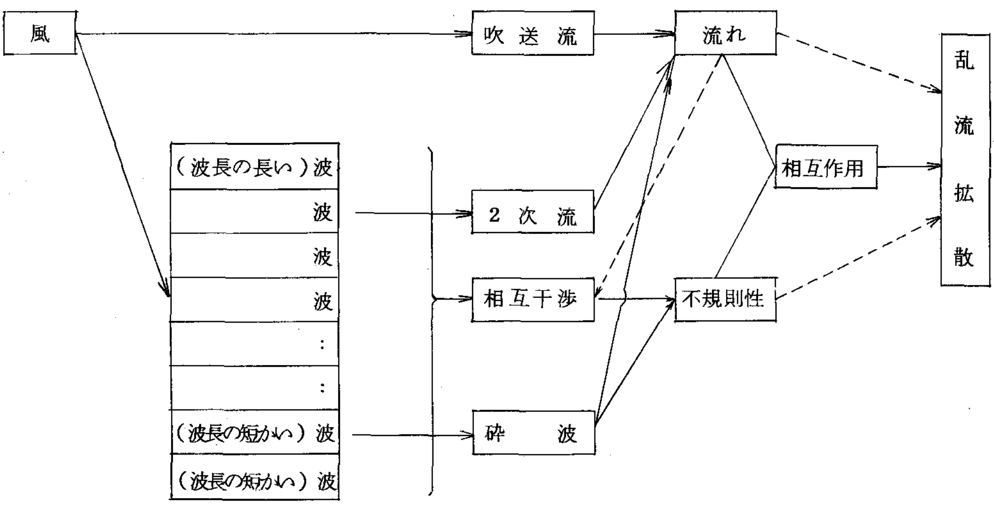
要旨：海域における乱流拡散は，工場廃水・都市汚廃物の放棄・原子炉からの廃棄物や核燃料の再処理の問題と関連して早急に解明をまたれる問題である。しかし，この問題を純粋に理論的に取扱おうとするとき，現象の複雑さゆえに大きな困難に遭遇する。本報告では現象の本質を見透すために，単純化された一次元的波動による拡散を乱流統計理論的に論じ，この問題の解への試論を展開した。

はじめに

“不毛の宇宙より豊かな海洋へ”の掛声とともに，人類の海の利用は急速に活発になりつつある。人間の生活空間には必ず人間生活にともなう直接間接の汚物の処理問題が生じるが，海での拡散も工場廃液・都市汚廃物の廃棄・原子炉廃棄物の処理などと関連して主要な研究課題となりつつある。

波による拡散の問題も，「拡散係数」といった大摑みな量を導入すれば，拡散の微分方程式を解くことに帰着する。しかし，「乱流拡散係数」というのは，長さ・重さ・温度・粘性係数などのように実在する量ではなく，便宜的に導入されたものにすぎない。したがって，「乱流拡散係数」の中身を理論的に説明する必要がある。

ところで，波による拡散過程を考えてみるとかなり複雑である。もちろん，非回転運動としての波によっては，（分子拡散は別にして）拡散は全く起らない。しかし，現実には波により明らかに拡散が行われている。この点について，われわれの研究室では数年前から種々の議論が行われ，また室内実験もすすめられつつある。



図－1：　波による乱流拡散のプロセス

まず，風が吹けば種々の波長の波が発生成長する。これらの波の各成分は，境界条件の一つである自由表面での条件(Bernoulli の定理)の非線型性のために相互干渉を生じ，いわゆる3次・4次の相互作用の結果新たな成分が発生する。この成分の発生過程で母成分波長の波長変動が拡大強調され，波の不規則性が生じるようになる。また，短波長の成分波では重力加速度と水分子の垂直加速度の平衡条件を越えると砕波が生じ，それが乱れと流れを誘起する。

一方，有限振幅波については，自由表面での Bernoulli の条件と粘性の影響による境界層により，2次流が発生する。したがって，波動には一般に流れが伴い，しかもさらに波と流れとが相互作用を起している。

しかし，整理して考えてみると，単純に「波による拡散」と云われている現象には，ⓐ 波自身の非線型性の結果である不規則性による拡散と，ⓑ 波の作る流れのための拡散とに分けることができよう。もちろん，これらは分離した現象ではなく，ともに波の非線型性に起因する表裏の関係にある。

理　　論

波自身による拡散の本質を解明するために，波を最も単純化して考えよう。すなわち，波動運動を一次元化する。この結果を通常の軌道運動の場合へ拡張することは簡単である。

基本的な波動運動の速度(Euler 速度)を

$$u(x,t) = U_0 \sin(kx - \sigma t) \tag{1}$$

とする。これに，変動成分 $u'(x,t)$ が重なって，波による流体の Euler速度は

$$u(x,t) = U_0 \sin(kx - \sigma t) + u'(x,t) \tag{2}$$

である。軌道運動の Lagrange 速度を $u_l(\xi_0, t)$ とすれば，流体粒子の位置は

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t u_l(\xi_0, t')dt' \tag{3}$$

と表わされる。

一方，Lagrange速度は Euler速度から次のように導かれる。

$$u_l(\xi_0, t) = u(\xi_0 + \int_0^t u_l(\xi_0, t')dt', t) \tag{4a}$$

$$= u(\xi_0, t) + (\int_0^t u_l(\xi_0, t')dt')\cdot \nabla_a u(\xi_0, t) + \cdots\cdots$$

$$= u(\xi_0, t) + (\int_0^t u(\xi_0, t')dt')\cdot \nabla_a u(\xi_0, t) + \cdots\cdots \tag{4b}$$

(上式で，∇_a は一般には gradient operator であるが，ここでは $\partial/\partial x$ を表す。)

したがって，式(2)(4a)より

$$u_l(\xi_0, t) = U_0 \sin(k(\xi_0 + \xi') - \sigma t + \theta) + u'(\xi_0 + \xi', t) \tag{5}$$

$$\xi' = \int_0^t u_l(\xi_0, t')dt' \tag{6}$$

したがって

$$\xi(t) = \xi_0 + U_0\int_0^t \sin(k(\xi_0+\xi') - \sigma t + \theta)dt + \int_0^t u'(\xi_0+\xi', t)dt$$

$$= \xi_0 + U_0\int_0^t \sin\chi_0 dt + U_0\int_0^t \cos\chi_0 \cdot k\xi' dt + \int_0^t u'(\xi_0, t)dt + \int_0^t \xi' \frac{\partial u'}{\partial x} dt + \cdots \tag{7}$$

ここに，$\chi_0 = k\xi_0 - \sigma t + \theta$，$\theta$:位相角

式(7)に部分積分を施し変形整理を行えば，

$$\xi'(t)\left[1 - kU_0\int_0^t \cos\chi_0 dt - \int_0^t \frac{\partial u'}{\partial x} dt\right]$$
$$= U_0\int_0^t \sin\chi_0 dt - kU_0\int_0^t u'\int \cos\chi_0 dt dt + \int_0^t u'(\xi_0, t)dt$$
$$- \int_0^t u'\int \frac{\partial u'}{\partial x} dt dt \tag{8}$$

となる。

さて，ここで波による拡散を放出点からの移動距離 $\xi'(t)$ と考える。今一つの定義は，

$$X(t) = \xi - (\xi_0 + U_0\int_0^t \sin\chi_0 dt)$$
$$= \xi' - U_0\int_0^t \sin\chi_0 dt \tag{9}$$

すなわち，波の基本軌道からの「ずれ」と考えることである。

乱流拡散理論における Taylor 流のやり方では，流体粒子の移動速度 v と移動距離 Y との平均 $\overline{vY}$ を作り，これを変形して拡散幅 $\sqrt{\overline{Y^2}}$ と流体粒子の移動速度の Lagrange 相関との関係を求める。しかし，ここではもつと直接的に式(8)の 2 乗の ensemble average をとる。その際には，次のような注意が必要である。例えば，f(η) を変動成分とするときは，次のようである。

$$\overline{\left[\int_0^t f(\eta)d\eta\right]^2} = \overline{\int_0^t f(\eta)d\eta \times \int_0^t f(\rho)d\rho} = \int_0^t\int_0^t \overline{f(\eta)f(\rho)}d\eta d\rho$$

$$= \overline{f^2}\int_0^t\int_0^t \varphi_{ff}(\eta-\rho)d\eta d\rho = 2\overline{f^2}\int_0^t\int_0^t \varphi_{ff}(\tau)d\tau d\rho \tag{10}$$

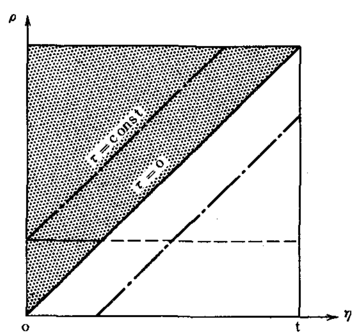
ここに，$\varphi_{ff}(\tau)$ は f(η) の自已相関係数で

$$\varphi_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\eta)}/\overline{f^2} \tag{11}$$

あり，偶関数である。

図－2は式(10)の積分の意味を示すためのもので，$\tau=0$ に関して被積分関数 $\varphi_{ff}(\tau)$ が対象であることが利用されている。

また，波動運動 $\sin(\sigma t+\theta)$ と流速変動成分 u'(t) と流速変動の勾配 $\partial u'/\partial x$ とは互に相関がないと考える。



図－2

$$\overline{\xi'^2(t)} = \left[\left(\frac{U_0}{\sigma}\right)^2 (1-\cos\sigma t) + \overline{2u'^2}\int_0^t\int_0^\rho \varphi_{uu}(\tau)\left\{1+\left(\frac{ku_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\cos\sigma\tau\right\}d\tau d\rho \right.$$

$$\left. \div \left[1+\left(\frac{ku_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 + 2\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}\int_0^t\int_0^\rho \varphi_{\dot{u}\dot{u}}(\tau)d\tau d\rho \right] \right] \tag{12}$$

ここで，一様乱流場での乱流拡散の理論

$$\overline{Y^2(t)} = 2\overline{v_L^2}\int_0^t\int_0^\rho R_L(\tau)d\tau d\rho \tag{13}$$

と較べると，波自身による拡散がかなり特異なことがわかるであろう。ただし，上式のうち(12) の自己相関 $\varphi_{uu}(\tau)$ はEuier流速に関するものであり，式(13) の自己相関 $R_L(\tau)$ は Lagrange 相関である。

もし，式(12) で $U_0=0$ と置けば，一様乱流場での拡散で式(13) を E!uler 相関で表示した式となる。

逆に，式(12) で $\overline{u'^2}=\overline{(\partial u'/\partial x)^2}=0$ と置けば，乱れのない場合の流体粒子の最初の位置からの移動のm.s. を表わす。この場合，$\overline{\xi'^2}\neq 0$ なのは一つの粒子の移動を追跡しての $\overline{\xi'^2}$ を求めたのではなく，ある一点で多数の粒子を時間を変えて放出した場合を考えているから，放出時間の波の位相により放出位置からの移動の r.m.s. は零とはならない。しかし，放出後の経過時間 t とともに増加せず，一定の範囲内にとどまる。

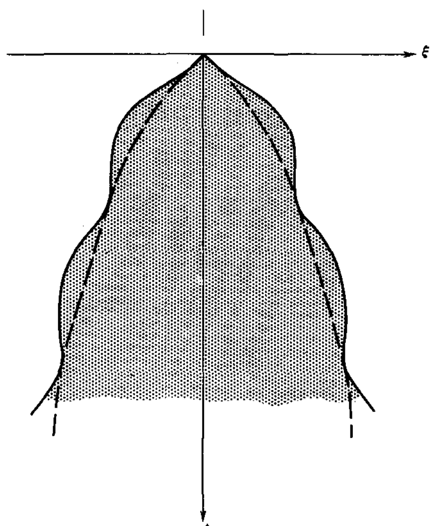
波による拡散の理論結果 一式(12) を模式的に示せば，図 － 3 のようになる。ただし，上述の理論は，放出点 ξ_0 のまわりでの流速の Taylor 展開にもとずいており，拡散幅 $\sqrt{\overline{\xi^2}}$がありま大きくないことが必要である。

理論式(12) の数値的具体的計算には，波の流速変動成分およびこれの場所的勾配の自己相関関数 $\varphi_{uu}(\tau)$, $\varphi_{\dot{u}\dot{u}}(\tau)$ あるいはスペクトルを知らなければならない。

数値計数結果および実験との比較については，次報で報告したい。

付記： i) Taylor の拡散理論がそうであるように，図 － 3のような拡散幅の変化も波および乱れが，例えばy軸方向にあり，これと直角方向に流れがあるという場合のパターンである。

ii) 染料などを一個所に放出し，この拡散を調べる場合は， two-particle analysis によらなけ



放出後の経過時間

図 － 3： 波による拡散，放出後の拡散幅の変化

ればならない。しかし，式(9)で定義されるX(t)の r.m.s. を代用して良いであろう。

iii) 実際の波には流れが伴うから；実験はむしろ two-particle の neighbour separation について行う方が良いであろう。

iv) 米国のコロンビヤ大学市栄やニューヨーク大学Rernertの染料の拡散実験の写真には図－3のような拡散パターン（t 軸方向に圧縮されたもの）が示されている。これは本理論の一つの検証である。(Proc. Symp. of Diffosion in Oceans and Fresh Weters ; 1964)

謝　辞　：　この研究は2年ほど前の　福岡　捷二君（東京工業大学　助手　現 Iowa 大学）らとの議論が端緒である。最近では，山崎　丈夫君（東京工業大学　大学院）との議論が有益であった。ここに謝意を表したい。