

掃流砂れきの運動形態とその力学過程について

京都大学防災研究所 正会員 ○土 屋 義 人
建設省近畿地方建設局 正会員 青 山 俊 樹

1. 緒 言 水流による比較的大きい砂れきの床面付近における運動は、床面との接触を保ちつつ運動する一般に saltation といわれる特徴的な運動としてあらわされ、これが砂れきの掃流機構の基本になっていると考えられる¹⁾。これと同様な現象は古く Bagnold らによって研究された飛砂の場合の saltation や大浦らによって写真撮影された飛雪の場合の saltation としてみることができる。この研究においては主として水流による砂れきの saltation について研究したこれまでの成果をもとにして、これらの現象をどう取扱うべきか、あるいはどのような現象として分類し、モデル化するかという点について、いまだ緒についたばかりであるが、簡単な理論をつけ加えて考察しようとするものであって、ご批判をいただければ幸である。

2. 掃流砂れきの運動形態 図-1は掃流砂れきの運動を16mm高速度カメラによって撮影し、それをフィルムモーションアナライザーによって、個々の砂れきの軌跡を解析したものである。図中 d : 砂れきの大きさ、 u^* : 摩擦速

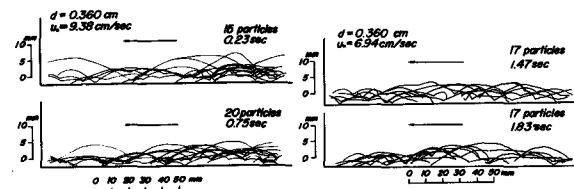


図-1 掃流砂れきの運動軌跡の一例

度であり、記入してある数字は解析の時間と砂れきの数を示す。著者らは、これらの解析を通じて掃流砂れきの運動を詳細に観察した結果、砂れきの静止状態を含む図-2のような7つの基本的現象によって、この現象があらわされることがわかった。図-2はこれらの基本的現象とそれらの相互関係を示すものであるが、これらの現象のうちとくに注目すべきことは、それぞれの現象への移行の確率過程が存在することであって、図中ではそれらを P_1 および P_2 と P'_1 、 P'_2 および P'_3 としてあらわした。図-3はこれらの移行確率の掃流力との関係を示す。図-4は跳躍に移行する砂れきが、その直前にどのような運動形態をとったかということを示したもので、図中の P_{Bd} 、 P_R および P_{C_2} は図-2に示したように、それぞれ現象 B_d 、 R およびそれ以外の現象 B_{C_2} などをとった割合を示している。

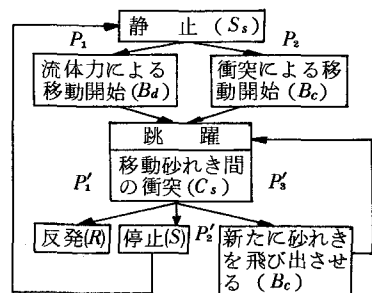


図-2 掃流砂れきの運動形態とその移行経路

3. 砂れきの運動機構

前述したような saltation に立脚した流砂モデルにしたがって、そのおのおのの形態における運動機構のうち、これまでに理論的に考察した結果の概要を述べ、流砂力学の確立への著者らの考え方を説明しよう。ただし、いまだおのおのの形態についての力学過程が十分解明されていないので、今後の展開に残されているところが少なくない。

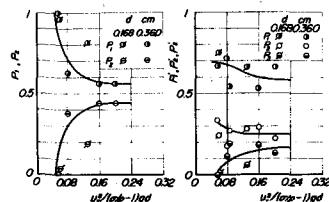


図-3 移行確率の変化

(1) 静止および移動限界 これまで、砂れきの移動開始の条件については、流体力などに対する静

的なつり合条件をもとにして考察されてきたが、一般に砂れきはその移動限界時に微少な揺動をしており、その理論的解析からその限界を表示することが要求される。とくに、著者らの最近の実験によると従来の無次元化して限界掃流力の表示すなわち $u_*^2/(\sigma/\rho-1)gd \tan \varphi$ と $u_*^2 d/\nu$ との関係に仮想質量力の効果と考えられる相対密度 σ/ρ の影響が存在することが見出されている。また、砂れきの揺動に対する運動方程式が Hill の方程式であらわされることがわかったので、つぎの機会にこの観点からの移動限界について述べるつもりである。

(2) Saltation の機構 いま、静止している砂れきが移動を開始して、下流に流送されていく過程を考えると、静止から跳躍に移行するまでには、一般に転動過程が存在する。この転動過程に引き続いて跳躍と転動とがくり返され、ある砂れきは床面などの特性との関連においてやがて静止し、またある砂れきは継続的跳躍運動をくり返して流下するものと考えられる。したがって、ここでは、以上述べた順にしたがい、砂れきの転動、跳躍とくに継続跳躍および定常的な跳躍運動について、簡単な力学的モデルについて述べよう。

1) 転動機構と跳躍への移行条件²⁾ 砂れき床面は、粒径程度の凹凸をもつ discrete な面であるので、ここでは砂れきと床面との接触点で、砂れきの回転のみでなく、すべりも生ずるものとして砂れきの運動を近似的に取扱えば、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} dU/dt &= -F/(\pi/6) d^2 (\sigma/\rho + 1/2) + (3/4) C_D (u-U)^2 / (\sigma/\rho + 1/2) d \\ (I + I_v) d\omega/dt &= F(d/2), \quad \alpha U - (d/2) \omega = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 U ：砂れきの速度、 d ：砂れきの大きさ、 σ/ρ ：比重、 C_D ：抗力係数、 t ：時間、 u ：砂れき近傍の流速でここでは摩擦速度を u^* とし $u = A_r u^*$ 、 I ：砂れきの中心軸に関する慣性 2 次モーメント、 I_v ：仮想質量力に対応するもの、 ω ：砂れきの角速度、 F ：摩擦力、および α ：平均的に回転速度の $1/\alpha$ がすべりによる速度に変わるものと仮定した係数である。 $t=0$ において $U=0$ とした(1)式の解は、 $\tau = \{C_D/(\sigma/\rho + 1/2)\} (u^* t/d)$ とし、

$$U/u^* = (3/4) \{1/(1+2\alpha/5)\} A_r^2 \tau \{1 + (3/4) \{1/(1+2\alpha/5)\} A_r \tau\}^{-1} \quad (2)$$

したがって、平均的な動摩擦係数を $\bar{\mu}$ とすれば、転動条件はつぎのようになる。

$$\bar{\mu} \geq (3/10) \{C_D/(1+2\alpha/5)\} (A_r - U/u^*)^2 \{u^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd\} \quad (3)$$

つぎに、運動が粒径程度の範囲に限られる場合には、床面は discrete な特性をもつために、砂れきには摩擦力は作用しないと考えるべきである。すなわち、このときは(1)式において $F=0$ となり、この解は、 $U/u^* = (3/4) \bar{u}^2 \tau / \{1 + (3/4) \bar{u} \tau\}$ 、 $\bar{u} \equiv u/u^*$ (4)

以上の考察において、 $\alpha=3$ とした(2)式の関係は、転動に関する実験結果とよく一致することがわかった。つぎに、砂れきは静止から転動し始め、ある距離転動して速度を増すと、床面の砂れきと衝突して跳躍に移行すると考える。いま、その条件を砂れきの衝突時について角運動量およびエネルギー保存則を適用して求めると、つぎのようになる。

$$U_0^2/(\sigma/\rho - 1)gd \geq (5/\alpha^2) (d/d) ((\sigma/\rho) \{1 - (10/7) (d/d)\}^2)^{-1} \quad (5)$$

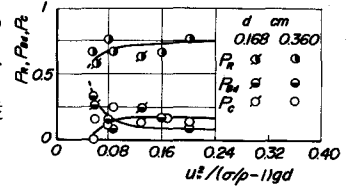


図-4 跳躍に移行する砂れきをとる運動形態の割合

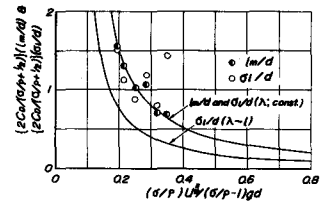
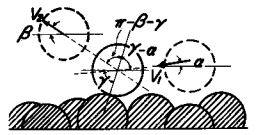


図-5 砂れきの転動距離の掃流力による変化

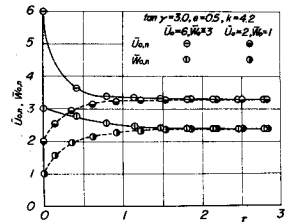
$$d^2\{1/(1+2\alpha/5)\}^2 A_1^2 \chi / \{1+(3/4)\{1/(1+2\alpha/5)\}\sqrt{\chi}\}^2 \geq (4/9) \{ (4/d) / \{1-(10/7)(4/d)\}^2 \} (1/\tau^*) \quad (6)$$



であらわされ，またその強度が ℓ に比例するとすれば，Yule 過程として，

$$f_{\xi}(\xi) = A\xi \exp \{ -(1/2)A\xi^2 \}, \quad \xi_m = \sqrt{\pi/2A}, \quad \sigma_{\xi} = \sqrt{(4-\pi)/2A} \quad (8)$$

2) 初期跳躍 (First saltation) 運動方程式は，近似的に次式であらわされる。



ここに, $\bar{W} = W/u^*$, $\bar{U} = U/u^*$, $K^2 = (4/3) \{ (\sigma/\rho - 1) g d / u^{*2} C_D \}$ また, 砂れきが落下する床面直前の速度 $\bar{W}_1$ および $\bar{U}_1$ は, $\bar{W}_1 = -K(\bar{W}/K) / \{ 1 + (\bar{W}/K)^2 \} \approx \bar{W}_0$, $\bar{U}_1 \div \bar{u} - (\bar{u} - \bar{U}_0) / \{ 1 + 2(\bar{u} - \bar{U}_0)\bar{W}_0/K^2 \}$ (11)

(11) 式をさらに積分して砂れきの跳躍高さ H_m および距離 L_m を求めれば、

$$H_m/d = (2/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2) / C_D \} \log \{ 1 + (\bar{W}_0/K)^2 \} \approx (2/3) \{ (\sigma/\rho + 1/2) / C_D \} (\bar{W}_0/K)^2 \quad (12)$$

前述したように、転動から跳躍へ移行するときの砂れきの初速度は一定に保たれるので、 $l_m/d \geq 1$ の場合(2)式によって求め、また $l_m/d \leq 1$ の場合には(4)式によって求め、(12)式に代入すると、

ただし, $N=(3/4)\{C_D/(\sigma/\rho+1/2)\}$, $\bar{W}_0=\beta\bar{U}_0$ これらの関係は著者らおよび岸らの実験とも一致する。また, 砂れきの跳躍高さの分布が衝突時の速度変動に起因すると仮定すれば,

$$f_s(\bar{H}) = (A_r/D)(d/\ell_m)\zeta\{1/(A_r-\sqrt{\zeta\bar{H}})\} \exp\{-(1/D)(d/\ell_m)(\zeta\bar{H})/(A_r-\sqrt{\zeta\bar{H}})\} \quad (16)$$

ここに, $1/\zeta = (1/2)\beta^2(\sigma/\rho + 1/2)\{u^*/(\sigma/\rho - 1)gd\}$, $D = (3/4)\{1/(1+2\alpha/5)\}$ これに対して, $\ell_m/d \leq 1$ の場合には $\bar{u}$ に対して Gauss 分布を仮定すれば, 後述する stationary saltation の場合と同様な分布式がえられる。これらのうち(16)式については, すでに著者らの実験値と比較されたが, $\ell_m/d \leq 1$ の場合については, 実験の都合上いまだ比較されていない。

3) 砂れきの反発機構 図-6のように, 砂れきの衝突による反発を考えることにすれば, 反発係数を e として, 次式が成立すると仮定する。

$$-eV_1 \cos(\tau - d) = V_2 \cos(\pi - \beta - \tau), \quad V_1 \sin(\tau - \alpha) = V_2 \sin(\pi - \beta - \tau) \quad (17)$$

これから, $\bar{W}_0$ と $\bar{W}_1$ および $\bar{U}_0$ と $\bar{U}$ との関係を求め, さらに, $\bar{U}_1 = \delta_1 \bar{W}_1$, $\bar{U}_0 = \delta_2 \bar{W}_0$ および $b_1 = (1+e) \tan \tau$, $b_2 = (1-e \tan^2 \tau)$, $b_3 = (\tan^2 \tau - e)$ を用いれば, つぎの関係がえられる。

$$\bar{U}_0 = e\bar{U}_1, \quad \bar{W}_0 = e\{b_1 \bar{U}_1 + b_2 \bar{W}_1\} / \{b_3 + b_1(\bar{W}_1/\bar{U}_1)\} \quad (18)$$

4) 砂れきの successive saltation の機構³⁾ 図-7は前述した関係を用いて, 図中に示した条件のもとに, 跳躍のくり返しを計算して, そのときの速度の変化を示した一例である。この結果において, おのおののまる印は saltation の回数に対応するが, これから初期条件をとわず 4~5 回の saltation によって各回の初速度が一定値になることがわかる。このような saltation を stationary saltation ということにする。いま, k 回目の saltation において, この stationary saltation に達したとすれば, つぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{0,k} &= P'\bar{u}, \quad \bar{W}_{0,k} = Q'\bar{u} \\ \bar{U}_{0,k+1} &= \bar{U}_{0,k}, \quad \bar{W}_{0,k+1} = \bar{W}_{0,k} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

したがって, これらの関係に(11)および(18)式を代入し, $\bar{U}_{1,k}$, $\bar{W}_{1,k}$ および $\bar{U}_{0,k+1}$, $\bar{W}_{0,k+1}$ を $\bar{u}$, $P'\bar{u}/K$, $Q'\bar{u}/K$, e , b_1 , b_2 および b_3 などの関数としてあらわすことができ, これらの諸式から P' , Q' , e および $\tan \tau$ の関係を求めると次式がえられる。

$$P' = e\{1 - (1-P') / \{1 + 2(1-P')Q'(\bar{u}/K)^2\}\}, \quad Q' = e\{(b_1/e)P' - b_2Q'\} / \{b_3 - b_1e(Q'/P')\} \quad (20)$$

これから, 一般に $Q' \leq P'$ であることに注意して P' および Q' について解き, 若干変形すれば,

$$P' = \{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)/\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\} / 2, \quad Q' = \lambda P' \quad (21)$$

したがって, これらを(19)式に代入すれば, stationary velocity $\bar{U}_s$ および $\bar{W}_s$ は, 近似的に,

$$\bar{U}_s = \{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)/\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\} \bar{u} / 2, \quad \bar{W}_s = \lambda\{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)/\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\} \bar{u} / 2 \quad (22)$$

この結果から, stationary saltation をとる条件がえられる。たとえば, $\bar{U}_s = \bar{W}_s = 0$ として,

$$u^*/(\sigma/\rho - 1)gd = (2/3)(1/C_D)\{(1-e)/e\lambda\bar{u}^2\}$$

がえられるが, これは通常の限界掃流力とは当然相違する。

つぎに stationary saltation における跳躍特性を $\bar{W}_0/K \ll 1$ として近似した場合についてのみ述べ

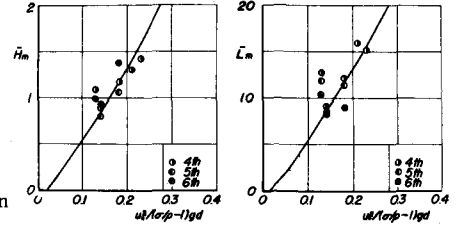


図-8 Stationary saltationにおける

砂れきの跳躍高さおよび距離の変化

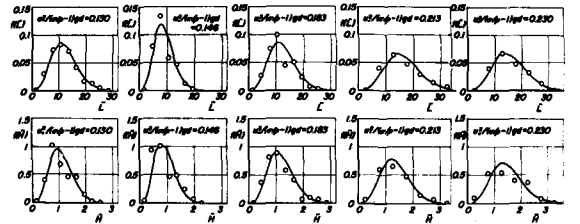


図-9 単一砂れきの跳躍高さおよび距離

の分布

るが、さらに一般的な場合に対しても可能である。(13)式において $(\bar{u}-\bar{u}_0)\bar{w}_0/K^2 \ll 1$ とした式に(18)式に代入すれば、砂れきの跳躍高さおよび跳躍の平均値 $\bar{H}_m$ および $\bar{L}_m$ は、それぞれ次式のようにならわされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_m &\div (1/6)(\sigma/\rho+1/2)\lambda^2 \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)/\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}} \right\} (\bar{u}/K)^2 \\ \bar{L}_m &\div (2/3)(\sigma/\rho+1/2)\lambda^2 \left\{ (1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)/\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}} \right\} (\bar{u}/K)^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

したがって、これから $\lambda \div 4(\bar{H}_m/\bar{L}_m)$ (25)

図-8は単一砂れきが移動を開始してより、第4, 5および6回目の跳躍がほとんど stationary saltation になっていると考えて、上式と実験結果とを比較したものである。実験値はかなりばらついているが、よく一致するといってよく、この場合 e の値は実験結果から0.89と定められた。(22)式の関係は単一砂れきの場合 $\lambda = 0.4$ として実験値によく適合する。

つぎに、定常跳躍における跳躍高さおよび距離の分布特性について考える。前述した stationary velocityは一般に砂れき間の衝突や速度の変動あるいは衝突時の角度の分布などによって、あるばらつきを示す。いまこの速度の確率密度関数が次式であらわされたとする。

$$f_1(\bar{U}) = (1/\sqrt{2\pi})(1/\sigma_{\bar{U}}) \exp \{ -(\bar{U}-\bar{U}_s)^2/2\sigma_{\bar{U}}^2 \}, \quad \sigma_{\bar{U}} = \varepsilon \bar{U}_s, \quad \bar{W} = \lambda \bar{U} \quad (26)$$

であるとすれば、跳躍高さの確率密度関数を $f_0(\bar{H})$ は、

(12)式と(24)式とより、

$$f_0(\bar{H}) = (1/2\sqrt{2\pi})(1/\varepsilon\sqrt{\bar{H}\bar{H}_m}) \exp \{ -(\sqrt{\bar{H}}-\sqrt{\bar{H}_m})^2/2\varepsilon^2\bar{H}_m \} \quad (27)$$

同様に、跳躍距離に対してはその密度関数 $f_1(\bar{L})$

$$\text{は、} f_1(\bar{L}) = (1/2\sqrt{2\pi})(1/\varepsilon\sqrt{\bar{L}\bar{L}_m}) \exp \{ -(\sqrt{\bar{L}}-\sqrt{\bar{L}_m})^2/2\varepsilon^2\bar{L}_m \} \quad (28)$$

図-9は(27)および(28)式と前述した stationary

saltation に対する実験値とを比較したものであるが、この場合便宜上それぞれの平均値に対しては実験値を用い、さらに e の値は実験値にあうように $e = 0.2$ と定められた。これからえられる $\sigma_{\bar{H}}/\bar{H}_m$ および $\sigma_{\bar{L}}/\bar{L}_m$ の値は掃流力に関係なく一定となり、これは実験値とも一致する。前述した7つの基本的状態に対して、ここでは砂れきが床面との反発をくり返していく場合のみを対象として考察する。

まず図-10は砂れきの跳躍高さおよび距離の掃流力による変化を示したものであり、

図中直線は first saltation であり、また曲線は stationary saltation の関係を示す。この場合、 λ の値は図-11に示すように、単一砂れきの場合と同様に掃流砂れきの場合でも0.4程度の値であることがわかったのでこの値をそのまま用いることにし、さらに反発に関する実験結果から求められた $e = 0.55$ を用いた。ここに示した実験値は、静止からの跳躍と反発による再跳躍の場合に限って、それらの平均値を示したが、これからつぎのことがわかる。すなわち、実験値のほとんどはこれら2つの理論曲線の間図示され、とくに掃流力の小さい場合には first saltation の曲線に近く、大きい場合にはいずれの理論にも近似されるが、さら

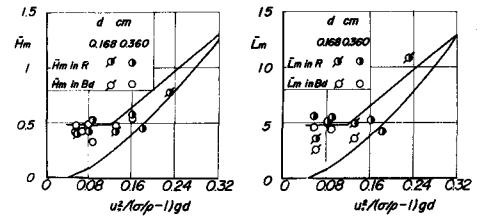


図-10 掃流砂れきの saltation の高さおよび距離の掃流力による変化

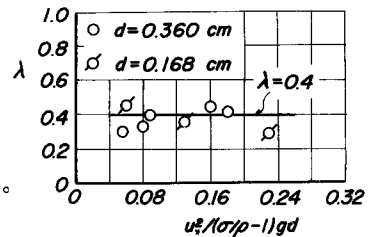


図-11 λ の掃流力による変化

- 1) 矢野, 土屋, 青山: 掃流砂れきの saltation に関する実験, 京大防災研年報, 第12号B, 昭. 44.
- 2) 土屋, 渡戸, 青山: 水流による砂れきの saltation の機構 (1), 同上.
- 3) 土屋: Mechanics of the Successive Saltation of a Sand Particle on a Granular Bed in a Turbulent Stream,

に掃流力が大きくなった場合の結果がないので明確なことはわからない。いいかえると，first saltationに近い運動をしている砂れきと stationary saltation に近いものとの配分が存在し，これが掃流砂れきの saltation の本質であるというべきであろう。図-3に示した実験結果から判断すると，後者の運動であらわされるものは約40%程度であろう。つぎに，図-12および13

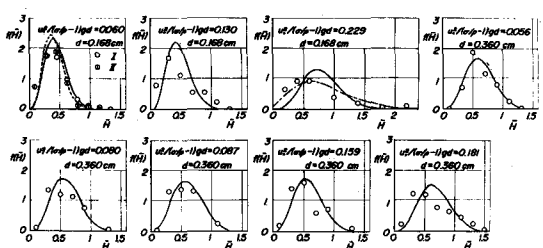


図-12 掃流砂れきの跳躍高さの分布特性

はそれぞれ掃流砂れきの跳躍高さと距離の分布特性を示したものである。ただし，理論曲線においては， $\epsilon = 0.2$ とし，平均値に対しては実験値を用いたのは図-9とおなじである。また， $\bar{u}^2/(\sigma/\rho-1)gd = 0.060$ の場合，Iは跳躍に移行する運動形式をとわずすべて

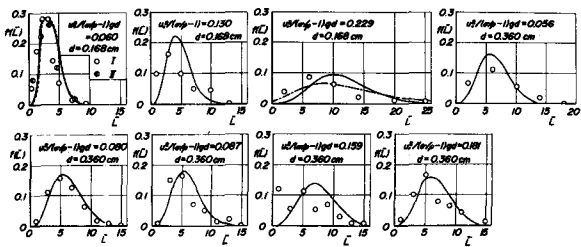


図-13 掃流砂れきの跳躍距離の分布特性

とりあげ，またIIは反発によるもののみをとりあげた結果である。図-9に示したものと比較して，その適合性はあまりよくないが，これは運動形式が反発のみに限定されないのと ϵ の値によるものと考えられる。たとえば，図-14は反発における砂れきのとび出し速度の分布を示したものであるが，これから $\epsilon = 0.3$ 程度が推定されるので，反発現象がかなり多いと考えられる。 $\bar{u}^2/(\sigma/\rho-1)gd = 0.229$ の場合に，この値を用いた理論曲線を示しておいた。さらに，これらの考察から図-15に示すように， $\lambda = 0.4$ に対して $\epsilon = 0.89$ および0.55のそれぞれに対応して $\tan r = 26$ および6がえられたが，これから r の値はそれぞれ約 87° および 80° である。反発機構の考察から， r の値が 90° に近いほど，床面の凹凸が砂れきの大きさに比べて小さいはずであるから，移動床においては床面の凹凸の効果が固定床よりも大きく，したがって，砂れきの跳躍高さなどの分布には ϵ の値として0.2より若干大きくとる必要があるといえよう。

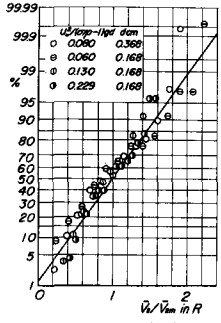


図-14 反発時の

速度の分布特性

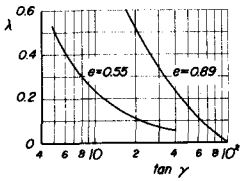


図-15 λ と $\tan r$ の関係

4. 結 語 以上，掃流砂れきの運動形態について概説し，このうち 図-15 λ と $\tan r$ の関係主として saltation についての簡単な力学モデルについて述べた。本研究では，この現象の究明にあたって，完全な平面上を砂れきが運動する場合の力学モデルでは説明しえない，いわゆる凹凸の場の砂れきの運動についての力学を追求することが，流砂力学の本質であると考えた。この観点に立って若干の考察をして，平均値な反発係数 ϵ と床面の状態をあらわす係数 r を導入して，固定床との対応を明らかにしたつもりである。さらに残された問題も少なくないが，こうした考えから saltation layer の流速分布⁴⁾や流砂量式に関する理論を試みて流砂力学の確立につとめたい。

Bulletin, 京大防災研, Vol. 19 No. 152, 昭44.
4) Owen, P. R. : Saltation of Uniform Grains in Air, Jour. Fluid Mech., Vol. 20, Part 2, 1964.