

移動河床に生ずる二、三の不安定現象

中央大学理工学部 林 泰 造

” 川 上 克 巳

1. 緒 言

河床面に生ずるいろいろな河床形態を、河床面形状の安定問題の立場から理論的に取り扱う。

2. 2 次的サンドウエーブ

砂漣, dune および antidune について考えてみる。申すまでもなく、砂漣は dune の波長の非常に短いものと考えられ、dune の範ちゅうに入るものである。dune とは水面形状が河床面形状と逆位相（後出図-3）となるサンドウエーブ（すなわち、いわゆる常流下のサンドウエーブ）をいい、antidune とは水面形状が河床形状と同位相（後出図-4）（すなわち、いわゆる射流下のサンドウエーブ）をいう。

河床面に空間的に正弦波形で与えられるような攪乱（図-1）を与えて、その攪乱に対する河床面の安定性について考えてみる。平均水深を d 、攪乱の影響を受けない流速を U とし、座標軸を図-1のようにとれば、自由水面および河床面はそれぞれ $y = \xi(x, t)$ および $y = -d + \eta(x, t)$ で表わされる。流体運動に課せらるべき境界条件は

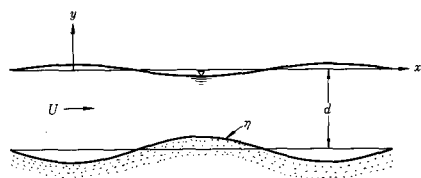


図-1

$$y=0: \quad \xi_t + U \xi_x = \phi_y \quad \text{および} \quad \phi_t + a \xi + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad (1)$$

$$y=-d: \quad \eta_t + U \eta_x = \phi_y \quad (2)$$

これらの境界条件を満足し、 $\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ を満足する速度ポテンシャルは

$$\phi = Ux - Ua \frac{\cosh ky + F^2 kd \sinh ky}{\sinh kd - F^2 kd \cosh kd} \cos kx \quad (3)$$

ただし、 $F = U / \sqrt{gd}$ は Froude 数、 $k = 2\pi/L$ 、 L は波長、 a はサンドウエーブの振巾である。上式を得るに当っては、 ξ および η は L に比べて非常に小さいとして境界条件における非線型項を無視してある。

サンドウエーブが U_b の速度で移動する場合（ただし、当然 $U_b \ll U$ ）には、 $\nabla^2 \phi = 0$ の解は、(3) に対応して

$$\phi = Ux - Ua \frac{\cosh ky + F^2 kd \sinh ky}{\sinh kd - F^2 kd \cosh kd} \cos k(x - U_b t) \quad (4)$$

となる。この式を(1)の第1式に代入すると、水面の波の振巾 $A(t)$ と サンドウエーブの振巾 $a(t)$ との比がつぎのように求められる。

$$\frac{A(t)}{a(t)} = - \frac{F^2 kd}{\cosh kd} \frac{1}{\tanh kd - F^2 kd} \quad (5)$$

$$\text{つぎに、河床面の変位 } \eta(x, t) \text{ と掃流砂量とをつなぐ関係式は } \eta_t + T_x = 0 \quad (6)$$

ここに、 T は水路の単位巾当りの掃流砂量（容積レート）である。 T としては $T \propto [\phi_x(x, -d, t)]^4$ と仮定する（大カッコ内は河床流速）。この関係式は Du B o y s の式 $T = K \tau (\tau - \tau_c)$ において $\tau \propto [\phi_x(x, -d, t)]^2$, $\tau_c \ll \tau$ の場合に相当するものである。しかし、 T には流速の他に河床面の勾配 $\partial \eta / \partial x$ も関係する筈である。例えば、図-2 の A 断面と B 断面とを比較すると、ポテンシャル流れである限りにおいては両断面における河床流速は相等しく、したがって $T \propto \phi_x^4$ と仮定する限りにおいては両断面における掃流砂量は相等しくなってしまう筈である。しかし、実際には図-2 に示されるように、サンドウエーブの背面では流れの剥離が起って、 B 断面の T は A 断面の T よりは当然小さくなる筈である。このようなことを考察して、 T としては新に次式をとることとする。

$$T(x, t) = m \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, t)}{\partial x} \right] \cdot [\phi_x(x - \delta, -d, t)]^4 \quad (7)$$

ここに m は次元をもった定数、 α は無次元の定数、 δ は局所的な掃流力とそれに応ずる掃流砂量との間に存すべきいくらかの遅れの距離であり、Kennedy¹⁾ の δ とは本質的に異るごく小さな値と考える。図-3 および図-4 はそれぞれ $A/a < 0$ および $A/a > 0$ の場合における T の空間的分布と、したがって T と河床面形状との間に生ずる位相差を示したものである。(6) から明らかなように、それぞれ $\partial T / \partial x < 0$ および $\partial T / \partial x > 0$ のところで堆積および洗掘が起る。したがって、これらの図から、サンドウエーブの波頂では堆積が、また波底では洗掘が起り、かくしてサンドウエーブの振巾が時間とともに増大してゆく状況が理解される。(7) と $\phi_x = U + u$ の関係式を(6)に代入すると

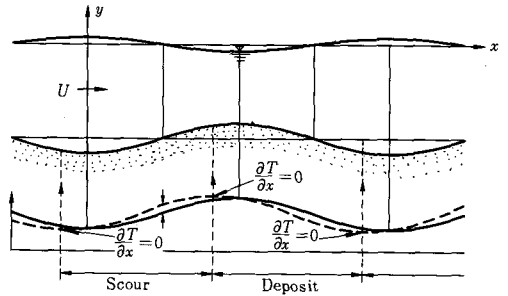


図-3 Dunes

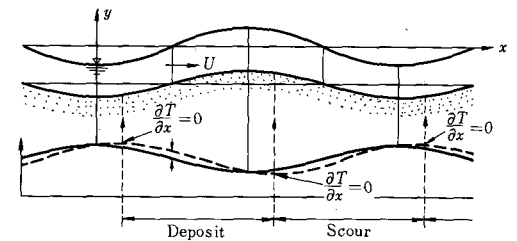


図-4 Antidunes

ここに $\bar{T} = m U^4$ は流れ全体としての掃流砂量である。上式に $\eta = a(t) \sin k(x - U b t)$ および(4) から得られる u を代入すると次式をうる。

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - k^2 \bar{T} \left[\alpha \cos k\delta - 4 \frac{1 - F^2 k d \tanh k d}{\tanh k d - F^2 k d} \sin k\delta \right] - k \cot k(x - U_b t) \left[U_b - \bar{T} k \left\{ \alpha \sin k\delta + 4 \frac{1 - F^2 k d \tanh k d}{\tanh k d - F^2 k d} \cos k\delta \right\} \right] = 0 \quad (8)$$

$a(t)$ は t のみの関数であるから、上式の $\cot k(x - U_b t)$ にかかる大カッコの中は 0 とならねばならない。そこで、いま $\cos k\delta \doteq 1$, $\sin k\delta \doteq k\delta$ と考えれば、上式から

$$U_b = 4 \bar{T} k \left\{ \frac{\alpha k \delta}{4} + \frac{1 - F^2 k d \tanh k d}{\tanh k d - F^2 k d} \right\}$$

$$a(t) = a(0) \exp \left[4 k^2 \bar{T} k \delta \left\{ \frac{\alpha}{4 k \delta} - \frac{1 - F^2 k d \tanh k d}{\tanh k d - F^2 k d} \right\} t \right]$$

をうる。さらにこれらの式に $\bar{T} = m U^4$ を代入すると、

$$a(t) = a(0) \exp \left[-\frac{m g^2 \alpha}{C} k^2 d^2 F^4 \left\{ C - 2 k d F^2 \frac{1 - F^2 k d \tanh k d}{\tanh k d - F^2 k d} \right\} t \right] \quad (9)$$

$$U_b = 4 m g^2 d k d F^4 \left\{ \frac{\alpha^2}{8 C} F^2 k d + \frac{1 - F^2 k d \tanh k d}{\tanh k d - F^2 k d} \right\} \quad (10)$$

をうる。ただし $C = \alpha / [\delta / (U^2 / 2g)]$ (11)

3. 2 次元のサンドウエーブの発生範囲

(9) の $\exp$ のべきを Γ とおくと、 $\Gamma < 0$ および $\Gamma > 0$ がそれぞれ安定領域および不安定領域を与える。安定限界は $\Gamma = 0$ で与えられ、これを Froude 数についてとくと、

$$F^2 = \frac{1}{4 k^2 d^2 \tanh k d} \left[C + 2 \pm \sqrt{(C + 2)^2 - 8 C \tanh^2 k d} \right] \quad (12)$$

C の値は実験的には今のところ未だ不明であるが、 C の値を仮定していくつかの数値計算を行った。図 - 5, 6, 7 はそれぞれ $C = 1.5, 2, 3$ に対する不安定領域を示したものである。これらの図中の点線は(9)の中カッコ内の第 2 項の分子および分母を 0 とおいた式から得られる関係式

$$F^2 = \coth k d / k d \quad (15)$$

$$\text{および } F^2 = \tanh k d / k d \quad (14)$$

を図示したものであり、(9)から明らかなように、 $C = 0$ のとき(すなわち $\alpha = 0$ の場合)にはこの 2 点線間の部分のみが不安定領域となる。そしてそこでは(5)から $A/a > 0$ となるからサンドウエーブは Antidune である。

平らな河床上に水を流しはじめると、はじめは Dune が発生するが、流速を(したがって F を)徐々に上げてゆくと、Dune は波長の長い形状

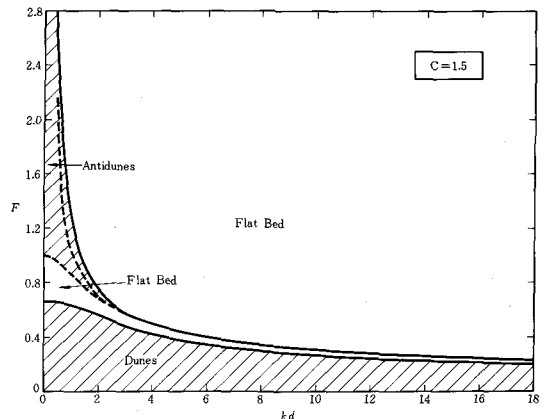


図 - 5 発生領域 ($C = 1.5$ の場合)

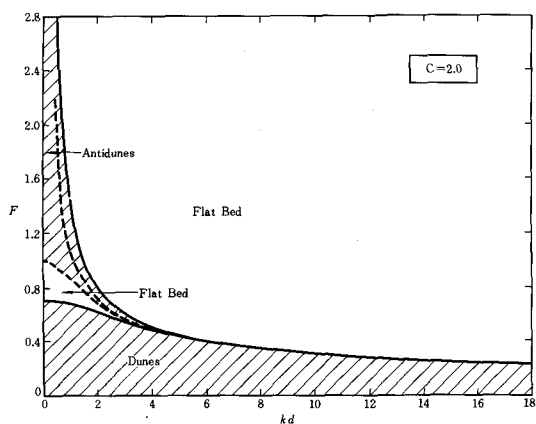


図-6 発生領域 ($C=2$ の場合)

(すなわち kd の小さい形状)の方に段々と移行してゆき、やがて一たん *Flat Bed* になる。そしてさらに流速をあげてゆくと *Antidune* が発生しはじめることが、これらの図から認められる。

図-8 は(9)の $\exp$ のべき (サンドウエーブの増巾率)の値を $F-kd$ 面上に図示したものである。

図-9 は *Kennedy*¹⁾ によって集録された従来の実験結果を著者の理論 (図-6 に示した $C=2$ の場合の不安定領域)と比較したものであり、実験と理論との一致は極めてよいといえるであろう。

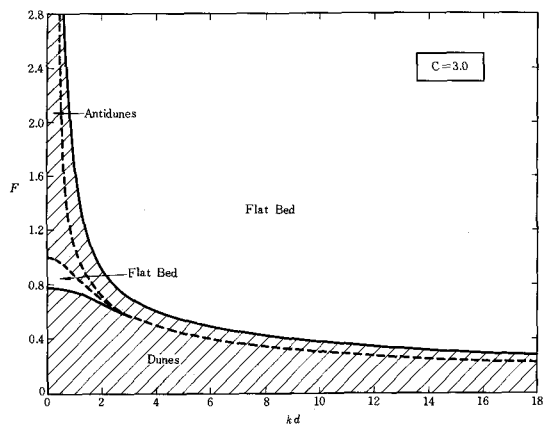


図-7 発生領域 ($C=3$ の場合)

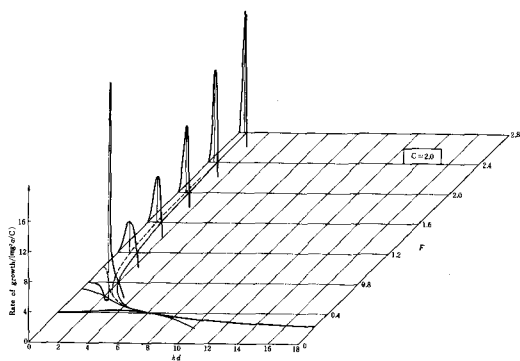


図-8 サンドウエーブの増巾率

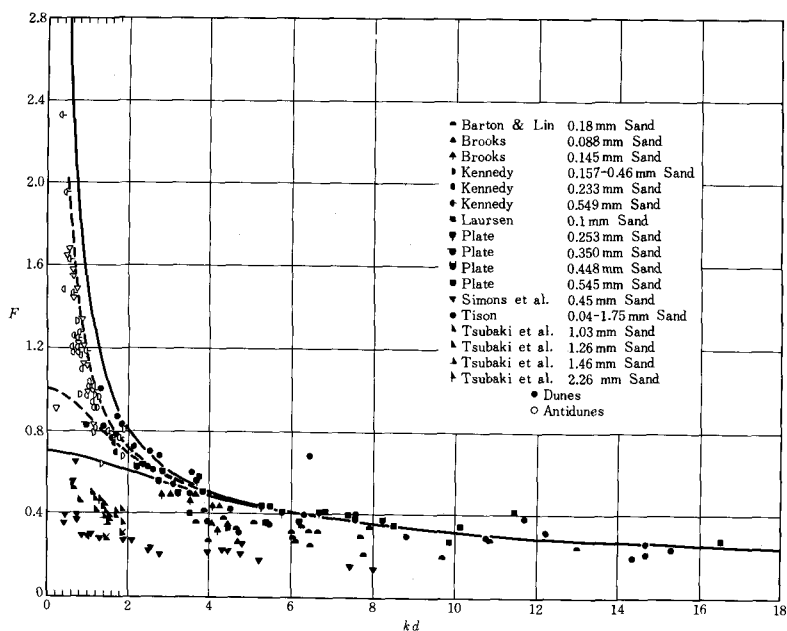


図-9 理論 (不安定領域) と実験値との比較

4. 蛇行砂礫堆

図-10 のような座標軸をとる。同図に示したような

$$\eta = a \sin kx \cos lz \quad (14a)$$

(ただし $k = 2\pi/\lambda$, $l = \pi/B$ が攪乱として河

床に与えられたとき, 水面での条件

$$\phi_t + g\xi + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = 0$$

および $\eta_t + U\eta_x = \phi_y$

を満足する $\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0$

の解は

$$\phi = Ux - \frac{Uk}{\beta} a \frac{\cosh \beta y + (F^2 k^2 d / \beta) \sinh \beta y}{\sinh kd - (F^2 k^2 d / \beta) \cosh kd} \cos k(x - U_b t) \cos lz$$

ただし $\beta = \sqrt{k^2 + l^2}$, $F^2 = U^2 / g d$ である。つぎに, 流線の方程式

$$\frac{dx}{\partial \phi / \partial x} = \frac{dz}{\partial \phi / \partial z} = \frac{dy}{\partial \phi / \partial y}$$

により $y = -d$ (水底)における流線の形を求

めてみるとつぎのようになる:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{kl}{\beta} a \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \cos k(x - U_b t) \sin lz \quad (16)$$

任意の瞬間におけるこの流線と 水底の形状とを併せ示したものが図-11 である。そこで, いま, この瞬間的な流線に沿って S 軸, それと直交して S' 軸をとると, S 方向への流砂量は(7)と同様の式で表わされうる筈であって, それは次のようである。

$$T_s = m \cdot [1 + \alpha \partial \eta(s - \delta, s', t) / \partial s] \cdot [\partial \phi(s - \delta, s', t) / \partial s]^4 \quad (17)$$

ただし, T_s : S 方向への流砂量 である。サンドウエーブの振幅 a が小さいとして, a^2 以上の項を無視しながら, 上式の T_s を x, z 方向への流砂量成分 T_x および T_z に分解すると,

$$T_x = \bar{T} \cdot [1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, -d, t)}{\partial x} + \frac{4}{U} \frac{\partial \bar{\phi}(x - \delta, -d, t)}{\partial x} + \dots] \quad (18)$$

$$T_z = \bar{T} dz/dx \quad (19)$$

ただし, $\bar{T} = m U^4$, $\bar{\phi} = \phi - Ux$ である。(18), (19) を掃流砂量の連続方程式

$\partial \eta / \partial t + \partial T_x / \partial x + \partial T_z / \partial z = 0$ に代入すると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{T} [\alpha \frac{\partial^2 \eta(x - \delta, -d, t)}{\partial x^2} + \frac{4}{U} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x - \delta, -d, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}] = 0 \quad (20)$$

となる。この式に(14a), (15) から与えられる $\bar{\phi}$ の表現, および(16) を代入し, 2次元サンドウエーブのときに(8), (9), (10)を得たと同様の計算をすると次式をうる。

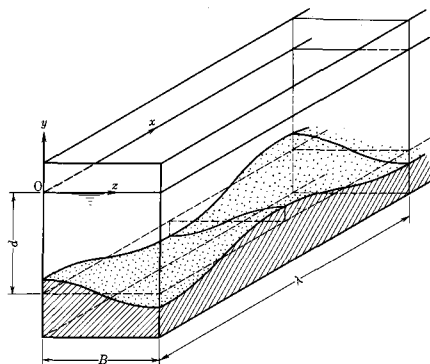


図-10

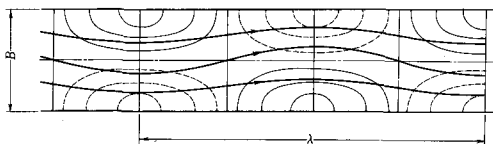


図-11 河床面上の流線

$$a(t) = a(0) \exp \left[\frac{m g^2 \alpha}{C} k^2 d^2 F^4 \left\{ C - \frac{2 k^2 d^2 F^2}{\sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2} - k^2 d^2 F^2 \tanh \sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2}}{\sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2} \tanh \sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2} - k^2 d^2 F^2} \right\} t \right] \quad (21)$$

$$U_b = 4 m g^2 d k^2 d^2 F^4 \left[\frac{\alpha^2}{8C} F^2 + \frac{1}{\sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2}} \right. \\ \left. \frac{\sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2} - k^2 d^2 F^2 \tanh \sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2}}{\sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2} \tanh \sqrt{k^2 d^2 + (\pi d/B)^2} - k^2 d^2 F^2} \right] \left[1 + \frac{(\pi d/B)^2}{4 k^2 d^2} \right] \quad (22)$$

この2式は著者の前報²⁾の式(20)および(21)と同一のものである。(ただし前報では $B = 2B/\lambda$ について書表わしてあったが、ここではそれを kd についての表現に書改めてある点のみが異なる)。図-12, 13, 14, 15 は(21)から計算されたそれぞれ $d/B = 0.02, 0.08, 0.10$, および

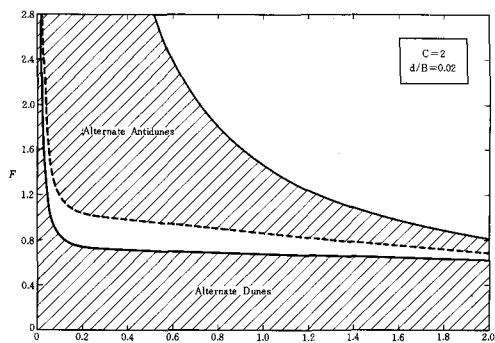


図-12 $C=2$, $d/B=0.02$ の場合

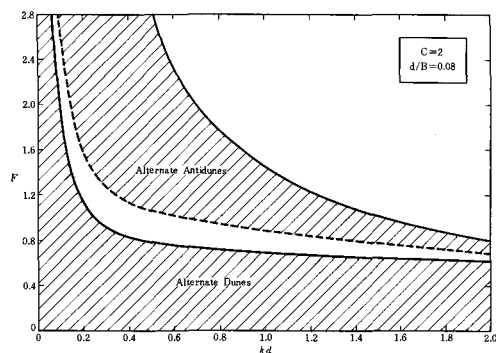


図-13 $C=2$, $d/B=0.08$ の場合

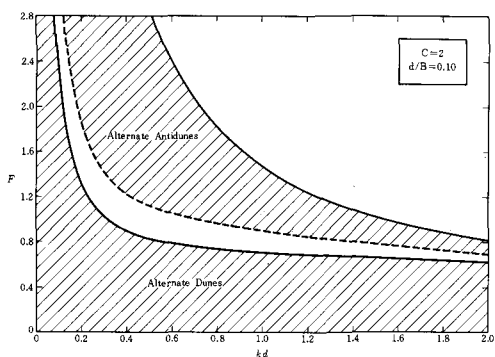


図-14 $C=2$, $d/B=0.10$ の場合

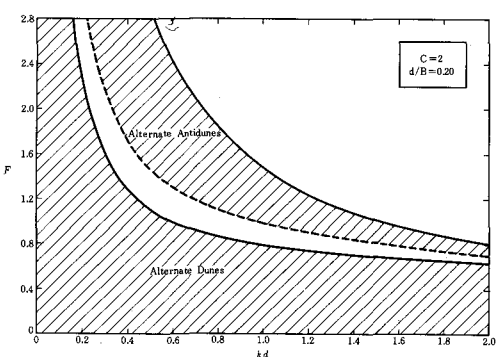


図-15 $C=2$, $d/B=0.20$ の場合

0.20 の場合(ただしすべて $C=2$)における蛇行砂礫堆発生領域である。2次元サンドウエーブの場合(図-5, 6, 7)とは異って, dune の領域が F の小さい範囲から大きい範囲にまで連続してつながっているので, 流速を0から段々と増加させてゆくと $F > 1$ の範囲でも交互の Dune が起きて, 交互の Antidune は起きにくい理由がそこに見られる。

図-16, 17, 18, 19 は木下博士³⁾の実験結果を著者が整理し直したものである。同一の d/B の値に対して F をいろいろの値に変えての実験はなされていない(F を変えると d/B の値も変っている)ので, 同博士の実験結果を d/B の値について4つのグループに大分けて, その各グループ

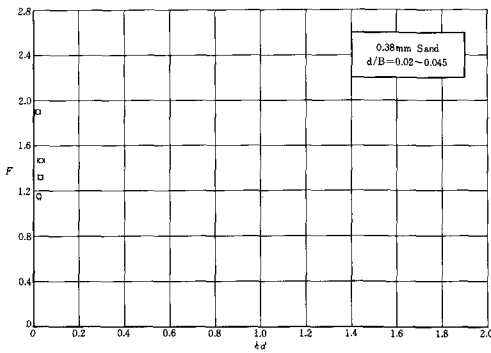


図-16 (木下博士データより)

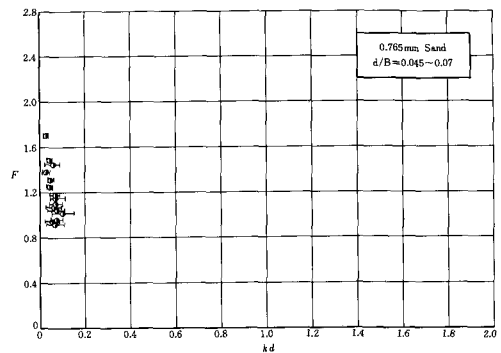


図-17 (木下博士データより)

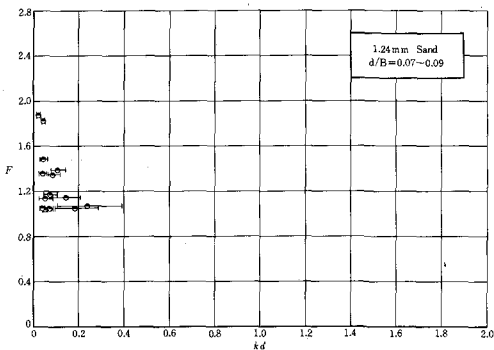


図-18 (木下博士データより)

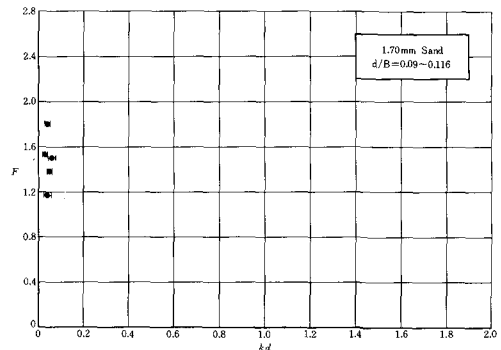


図-19 (木下博士データより)

ごとくに図示した。蛇行砂礫堆の発生範囲について、理論は実験とよく合っているといつてよいように思われる。

5. うろこ状砂礫堆

図-10 の河床形状をその $z=0$ の面に対して鏡像をつくり、それを併せるとうろこ状砂礫堆形状ができる(図-20)。このような鏡像をいくつも横につなげてゆくと幾かものうろこ状砂礫堆ができてゆく(図-21)。この場合の河床面形状を次式で表わすこととする。

$$\eta = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{j\pi}{B} z, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (23)$$

そこで前節におけると同様の計算を行って $a(t)$ および U を求めると(21)および(22)と同様の式をうる。この場合、(21)および(22)との唯一の相違点は $\pi d/B$ の代りに $j\pi d/B$ が入ってくることである。

図-22 は 2次元サンドウエーブ(23)の j が $j=0$ の場合に当る、蛇行砂礫堆(23)において $j=1$ の場合)および $j=2$ のときのうろこ状砂礫堆の各発生範囲の相互関係を $d/B=0.10$ の場合を例にとって図示したものである。流速を 0 から徐々に上げてゆくと、2次元 dune から一たん Flat bed になって、それから antidune に移る場合もあり； 2次元 dune から蛇行 dune に移る場合もあり； 2次元 dune からうろこ状 dune に移る場合もあり； 蛇行

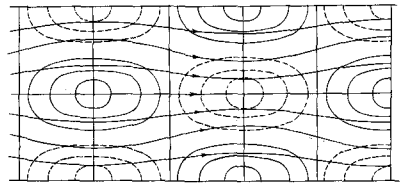


図-20 うろこ状砂礫堆

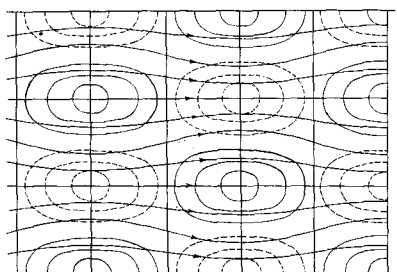


図-21 うろこ状砂礫堆

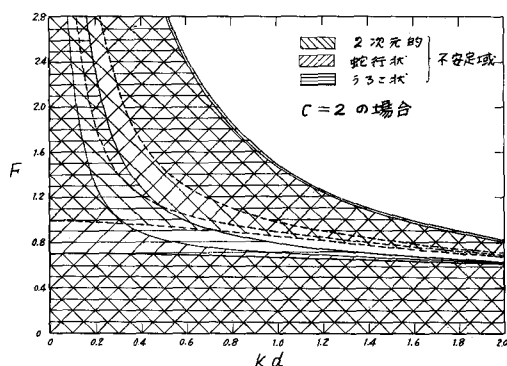


図-22 いろいろな河床形状の発生領域

dune からうろこ状 dune に移る場合もあり、等々で非常に複雑であり、しかもその状況は パラメーター d/B の値によって異なっている。これらの変化についての統一的研究を目下検討中である。

6 引用文献

- 1) John F. Kennedy: *The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels*, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 16, part 4, 1963, pp. 521-544.
- 2) 林 泰造: 河川蛇行性の理論, 土木学会学術年次講演会, 1968年9月。
- 3) 林 泰造: *The formation of dunes and antidunes on the erodible bed of an open channel*, *Proc. ASCE* (投稿中)。
- 4) 木下良作: 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料第36号, 1962年。

附 記

本研究の理論的な部分の大部分は林が Iowa 大学水力学研究所滞在中に行ったものであって、研究の遂行に当っては同所において同研究所所長 J. F. Kennedy 博士より数々の有益な討議を与えられた。また、後に国内において 木下良作博士から多くの貴重な討議を戴いた。記して両博士に謝意を捧げる。

なお、本研究における数値計算にはすべて高速電子計算機 HIPAC 103 を使用し、これの使用に川上が当った。

図面の作製, データ の整理には中央大学実験講師 今井 孝 および同大学院生 片山統雄の2氏が協力せられた。記して両氏にも謝意を表する。