

情報理論的水文学の一手法(II) 非線型流出系への適用

東京工業大学 工学部 正員 日 野 幹 雄

要旨 : 前報告^{1) 2)}では降雨 — 流出系を線型系とみなして, Wiener — Kolmogorov criterionにもとづき予測時間 α を含む最適予測関数("一般化された unit hydrograph")を求め, その意味を検討した。降雨量が少い場合には, このような線型予測と実測はかなり良く一致するが, 降雨量が多くなるとつれて流出現象の非線型性が強くなり, 線型系としての予測が適用できなくなる。ここでは, 降雨および流出の非線型変換により, 前論文の理論をそのまま非線型系に応用する方法を述べ, その適用例を示した。

1. コヒーレンス : 降雨と流出の関係は unit hydrograph の概念がそのまま適用されるような線型系であることは稀れである。一般には, 降雨と流出は非線型系をなすと考えなければならない。つまり, unit hydrograph が降雨強度などによって異なることは良く指摘されて来た。

ある系への入力(今の場合は降雨)がランダムであるとき, その系の線型性の度合を調べるには, 入出力のコヒーレンスを調べれば良い。コヒーレンス $r^2(\omega)$ は

$$r^2(\omega) = \frac{|\Phi_{io}(\omega)|^2}{\Phi_{ii}(\omega)\Phi_{oo}(\omega)} = \frac{C^2(\omega) + Q^2(\omega)}{\Phi_{ii}(\omega)\Phi_{oo}(\omega)} \quad (1)$$

で定義される。ただし, ここに $\Phi_{ii}(\omega)$ = 入力のスベクトル, $\Phi_{oo}(\omega)$ = 出力のスベクトル, $C(\omega)$ = クロス・スベクトル Φ_{io} の実数部でコスベクトルと呼ばれ, $Q(\omega)$ = クロス・スベクトル Φ_{io} の虚数部でクオドラチャ・スベクトルと呼ばれる。すなわち, Φ_{ii} , Φ_{oo} , Φ_{io} をそれぞれ入力(降雨)の自己相関, 出力(流出)の自己相関, 入出力(降雨 — 流出)の相互相関とすれば,

$$\Phi_{ii}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi_{ii}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

$$\Phi_{oo}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi_{oo}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

$$\Phi_{io}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi_{io}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4)$$

また, 次式によって定義される phase angle θ は入出力の間の遅れの関係を示し, 現象の遅れ時間は $\theta / 2\pi f$ である。

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} Q(\omega) / C(\omega) \quad (5)$$

もし, 系が線型であれば, 流出 $f_o(t)$ は一般化された unit hydrograph $h(\tau, \alpha)$ を用いて降雨 $f_i(t)$ より

$$f_o(t + \alpha) = \int_{-\infty}^\infty h(\tau, \alpha) f_i(t - \tau) d\tau \quad (6)$$

により求められる。したがって, 式(5)よりスベクトル $\Phi_{ii}(\omega)$, $\Phi_{oo}(\omega)$, クロス・スベクトル $\Phi_{io}(\omega)$

および $h(\tau, \alpha)$ の Fourier 変換である system function $H(\omega)$ の間には

$$\phi_{oo}(\omega) = |H(\omega)|^2 \phi_{ii}(\omega) \quad (7)$$

$$\phi_{io}(\omega) = H(\omega) \phi_{ii}(\omega) \quad (8)$$

の関係が成立する。式(7)(8)より線型系ではコヒーレンスは

$$r^2 = |\phi_{io}|^2 / \phi_{ii} \phi_{oo} = 1 \quad (9)$$

でなければならない。一般にコヒーレンスは

$$0 \leq r^2 \leq 1 \quad (10)$$

であることが理論的に証明しうる。

実際の流出現象でコヒーレンスやフェーズ・アングルがどうなっているかを調べるため竹内俊雄ら建設省グループの測定した神流川の水文資料のうち日雨量・日流量のデータから求めた r , θ の例を図-1, 2 に示す。この図と次頁に示す降雨と流量の相互相関を合わせみると、流出現象がはっきりと2つの成分——短周期と長周期の流出から成り立っていることがわかる。

降雨量が少なければ地下滲透の割合が多く、表面流出の割合が少ないから相互相関のピークは低い、降雨量が多くなるにつれて

表面流出の割合が多くなるから $\phi_{io}(\tau)$ のピークも高くなる。しかも、図-1 によれば、長短それぞれの流出成分と降雨とのコヒーレンスはかなり良く、中間周期 ($f = 0.2 \sim 0.35 \text{ cycle/d}$) では coherence gap がある。この gap に対応して、phase (図-2) にも phase gap がみられる。

図-1 a は降雨量の少ないグループ、図-1 b は降雨量の多いグループであるが、降雨量が多くなるにつれて高周波数の変動に対するコヒーレンスは悪くなる。

このように、コヒーレンスやフェーズ・アングルはわれわれが流出現象について定性的に云っていることを定量的に表現していると云える。

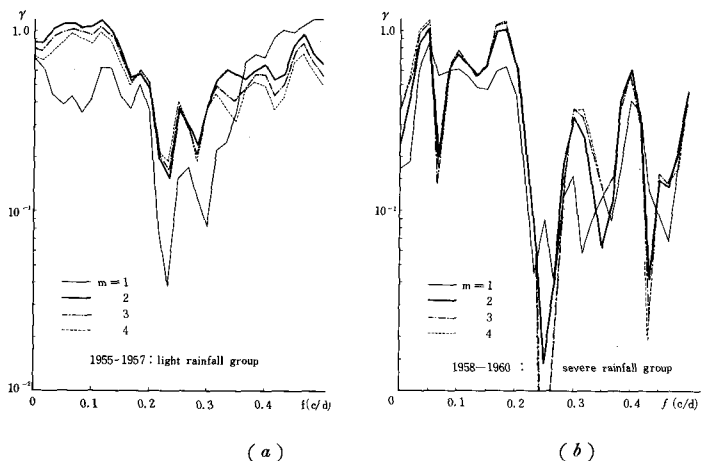


図-1: 降雨 — 流出のコヒーレンス; 非線型変換, 式(11)によるコヒーレンスの変化

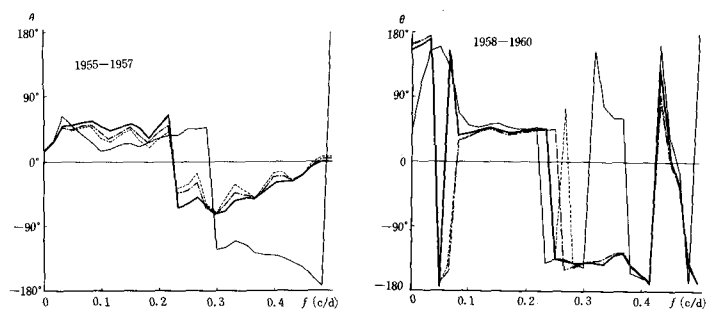


図-2: 降雨 — 流出のフェイズ・アングル

2. 非線型変換によるコヒーレンスの回復

非線型現象の予測は、理論上からはWiener⁴⁾の非線型予測の理論を応用すれば良いわけで、例えば Jacoby⁵⁾や Amorocho⁶⁾の研究がある。しかし、こうした理論の適用はかなり面倒であるし、またそうした非線型予測理論の複雑さに相当するほど予測の精度は良くなってはいない。それゆえ、無理に非線型理論を応用するよりも、線型予測理論にわずかの修正を行って予測精度が向上すれば、これに越したことはない。こうした方法の2,3を前報告の図-8, 9に示しておいたが、ここではそのうちの一つである降雨・流出の非線型変換法(図-4)の適用性を調べてみる。非線型変換としては、最も単純なべき乗法を採用。すなわち、 $f_i \cdot f_o$ を次のような変換によって別の domain に mapping する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_i &= [f_i]^m \\ \tilde{f}_o &= [f_o]^n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

この変換によって、 $\tilde{f}_i$ と $\tilde{f}_o$ のコヒーレンスがより1に近づけば、その domain で線型予測の response function $\tilde{h}(\tau)$ を求め、その domain で線型予測を行い、

$$\tilde{f}_o(t+a) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau, a) \tilde{f}_i(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

その結果を原領域にもどせば良い。

実際には、式(11)で $n = 1$ とし、 $m \geq 1$ の場合に良い結果を与えるであろう。それは降雨 $f_i(t)$ が小さければ流出 $f_o(t)$ も相対的に小さく、 $f_i(t)$ が多くなるにつれて地下滲透量が飽和状態に近づくことや表面流出の非線型性のために $f_o(t)$ は急激に増大するからである。言い換えれば、linear system と考えるためには大きな流出 $f_o(t)$ に見合うために、あたかも $f_i(t)$ が実際の $f_i(t)$ より遙かに大きいと考えた方が良いのである。

$n = 1$ とし、 $m = 1, 2, 3, 4$ などの値を入れてコヒーレンスを求めた結果が 図-1 に記入されている。($m = 0.6, 0.8$ についても計算したが、当然のことながらコヒーレンスはかえって悪くなったので図には記入されていない。)

このような m の値の最適値を簡単に見付けるのには降雨量 $f_i(t)$ とその降雨に対応する流出量

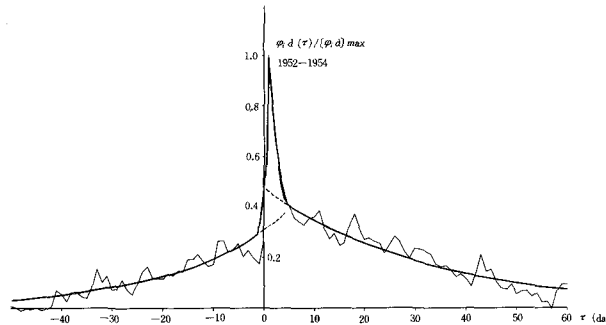


図-3(a) 降雨 — 流出の相互相関

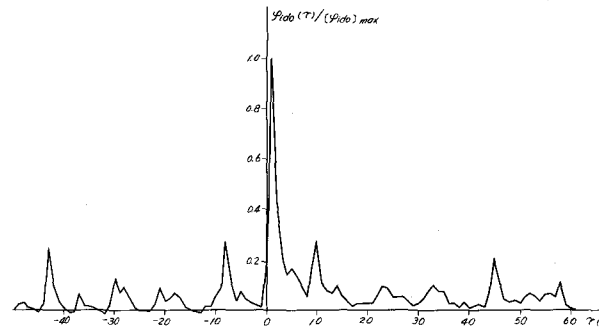


図-3(b) 降雨 — 流出の相互相関

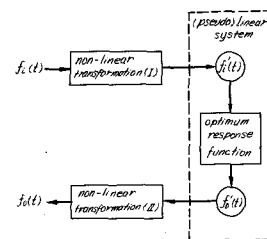


図-4 非線型変換による流出予測

$f_o(t+\beta)$ とその1日前の流出量 $f_o(t+\beta-1)$ との差 Δf_o を両対数グラフに目盛りそれが直線となれば、その勾配を m とすれば良い。図-5 はこうした水文資料(神流川)の整理結果の一例である。

もし、このような図で f_i と Δf_o の対数関係が直線でないならば、式(11)のような変換は折れ線の関係にした方が良い。

図-1 のコヒーレンスの関係は、 $m=2$ のとき降雨量の少ないグループ(図-1 a)ではやや、降雨量の多い場合(図-1 b)には相当に良くなっていると云える。また、図-5 からも $m=2$ が最適値であると云える。

3. 非線型変換による流出予測性の向上

そこで、 $m=2$ とした場合の $\tilde{f}_i(t)$ と $\tilde{f}_o(t)=f_o(t)$ から変換領域での最適予測関数 $\tilde{h}_{opt}(\tau)$ を求める。これには、解析的な方法と数値的な方法とがあるが^{2),3)}、ここでは数値的方法、(13)、によって求める。(記号~は省理)

$$[h] = \{ [\varphi_{ii}]^T [\varphi_{ii}] \}^{-1} [\varphi_{ii}]^T [\varphi_{id}] \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $[h]$ 、 $[\varphi_{ii}]$ 、 $[\varphi_{id}]$ は次式で定義されるマトリックス、 $[\varphi_{ii}]^T$ は $[\varphi_{ii}]$ のtranspose、 $[\]^{-1}$ は inverse matrix を表す。

$$[h] = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(m) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14a)$$

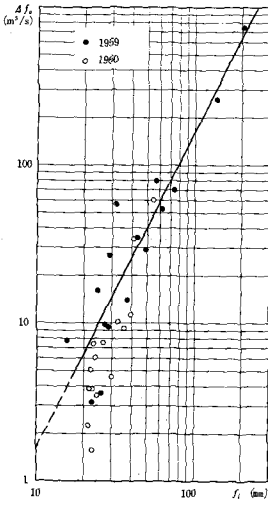
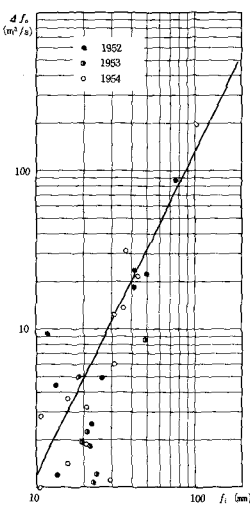


図-5: 非線型変換, 式(11), における最適べき乗指数の推定

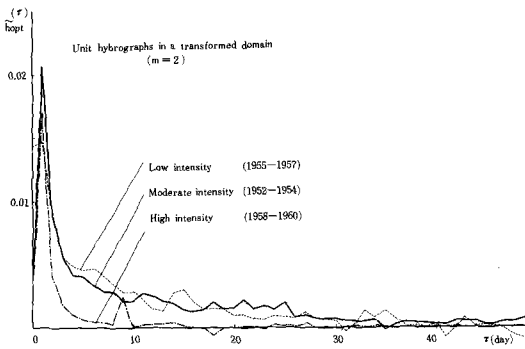


図-6: 非線型変換域での最適予測関数

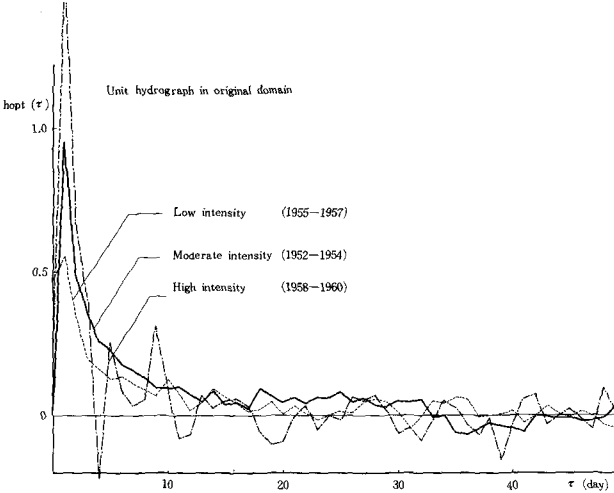


図-7: 生の水文資料についての最適予測関数

$$[\varphi_{ii}] = \begin{bmatrix} \varphi_{ii}(0) & \varphi_{ii}(1) & \varphi_{ii}(2) & \cdots & \varphi_{ii}(k) \\ \varphi_{ii}(1) & \varphi_{ii}(0) & \varphi_{ii}(1) & \cdots & \varphi_{ii}(k-1) \\ \varphi_{ii}(2) & \varphi_{ii}(1) & \varphi_{ii}(0) & \cdots & \varphi_{ii}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{ii}(m) & \varphi_{ii}(m-1) & \cdots & \cdots & \varphi_{ii}(k-m) \end{bmatrix} \quad [\varphi_{id}] = \begin{bmatrix} \varphi_{id}(0) \\ \varphi_{id}(1) \\ \varphi_{id}(2) \\ \vdots \\ \varphi_{id}(k) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

もし、 $k = m$ ならば、式(13)は次のようになる。

$$[h] = [\varphi_{ii}]^{-1} [\varphi_{id}] \quad (13b)$$

上式により求めた $m = 2$ ， $n = 1$ の変換領域での最適予測関数 $\tilde{h}(\tau)$ を図-6に， $m = n = 1$ の原領域での最適予測関数 $h(\tau)$ を図-7に示す。水文資料は連続する3年毎の3グループに分けたが，それぞれの降雨強度はたまたま軽・中・強となった。図-7の原領域の $h(\tau)$ は降雨規模によりかなり形が異なりそのピーク値も著しく違うが，図-6の変換領域の $\tilde{h}(\tau)$ はかなり相互に似た形となり，unit hydrograph として降雨強度によらないものが得られた。

この $\tilde{f}_i$ ， $\tilde{f}_o$ 領域で $\tilde{h}$ により線型予測し，原領域にもどして f_o を求めた（この例では $n = 1$ でその必要はない）一例が図-8であり，種々の m の値について同様な予測をしその予測誤差のスペクトルを示したのが図-9である。これらの図から極く単純な非線型変換により，線型予測法の予測精度が著しく向上することが確められた。

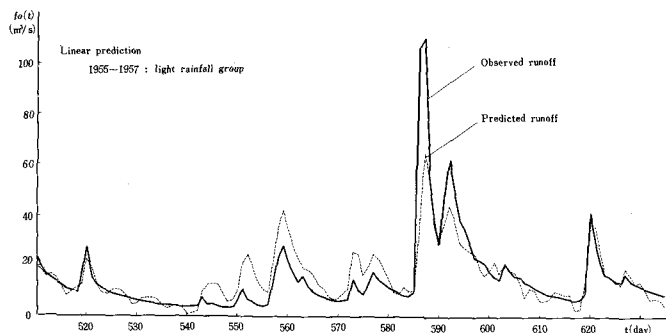


図-8 (a) : 線型予測と非線型予測 ; 実測と予測との比較

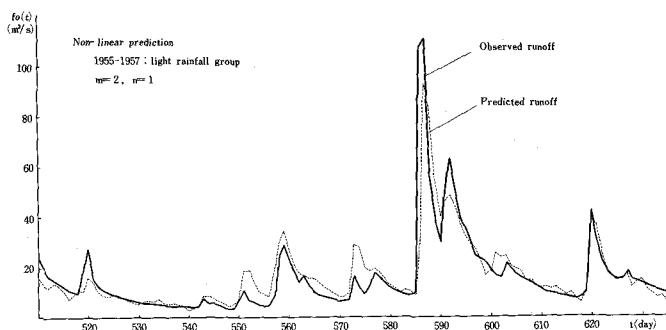


図-8 : 線型予測と非線型予測 ; 実測と予測との比較 (その1)

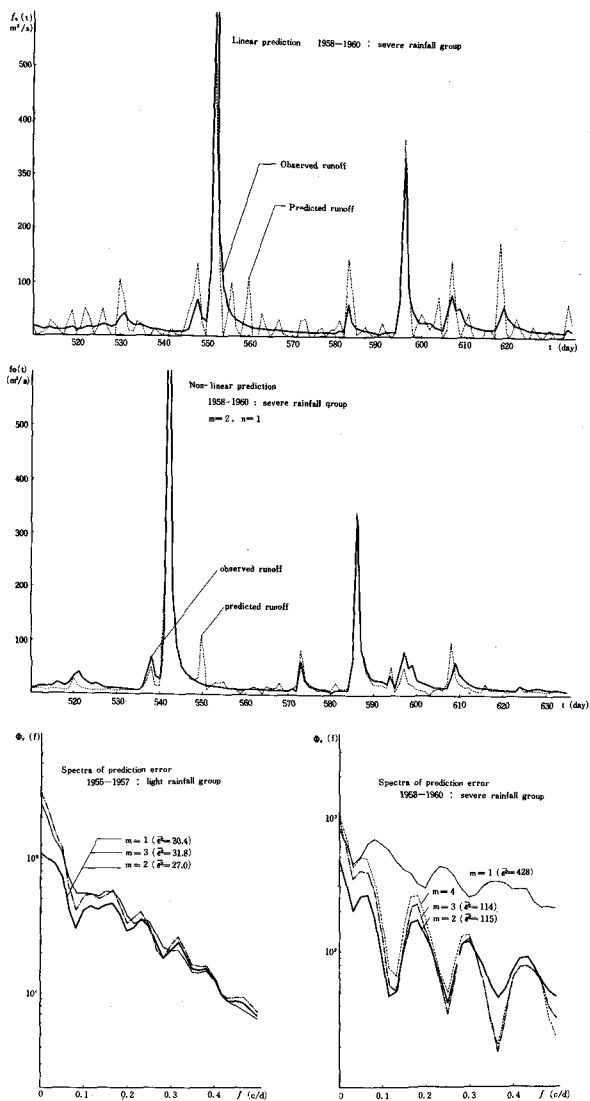


図-9. 予測誤差のスペクトルと変換べき数との比較

参 考 文 献

- 1) 日野 幹雄(1967) : 第4回災害科学総合シンポジウム論文集
- 2) 日野 幹雄(1968) : 東京工業大学 土木工学科研究報告 第4号
- 3) 日野 幹雄(1968) : 第12回水理講演会講演集
- 4) Wiener, N. (1958) : "Nonlinear Problems in Random Theory", MIT Press
- 5) Jacoby, S. L. S. (1966) : J. Geophys. Res., vol. 71, no. 20
- 6) Amorocho, J. (1963) : J. Geophys. Res., vol. 68, no. 8