

密度差を有する 2 次元水平噴流

東京大学工学部 正員 玉井 信行

温水放流・河口における塩淡水の混合現象を解明する試みとして、2次元の水平噴流の考察を行なう。従来、温水放流の問題に関しては、上層・下層水の混合を無視した解析¹⁾、現地観測資料を折込んだ数値モデルによる実際の海湾に対する解法²⁾、混合係数を近似的に数式化し、解析的に解く方法³⁾等が発表されている。また鉛直噴流に関しては、混合係数を一定と考えて種々の境界条件に対して考察した例⁴⁾等がある。本論文においては、数値積分を行なうことにより、混合係数の場所的变化を直接取り入れることを考えた。

1 基本式の誘導

座標系及び噴流の概要を模式的に示すと図-1のようになる。解析の前提となる仮定は、1) 流れの確立領域のみを考える；2) この領域においては、流速分布・密度分布は断面内において共に相似であるとする。これを示すと次式のようになる。

$$u(x, y) = U(x) \cdot f\left(\frac{y}{h}\right) \quad (1)$$

$$v(x, y) = V(x) \cdot g\left(\frac{y}{h}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\rho_w - \rho(x, y)}{\rho_w - P(x)} = m\left(\frac{y}{h}\right) \quad (3)$$

ここに、

u : 任意点における速度の x 方向成分

v : 任意点における速度の y 方向成分

ρ : 任意点における密度

U : 水表面における水平流速

V : 上下層の境界における鉛直方向速度

P : 水表面における密度

ρ_w : 静止している下層流体の密度

h : 上層の水深

解析に用いる原理は、体積、質量、運動量の3保存則である。これらを式で書き表わせば以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (5)$$

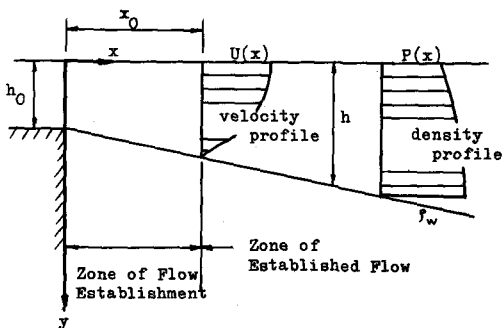


Fig.-1 Schematic View of Two-Dimensional Horizontal Jet

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

式(4)を水深方向に積分する。

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

$u(x, y)$, $\partial u / \partial x$ は x , y に関して連続であり, h は x のみの函数であるから, 微分と積分との順序を変換することができ, 上式は次のように書き直される。

$$\frac{d}{dx} \int_0^h u dy + v \Big|_{y=0}^{y=h} = 0$$

式(1), (2)を用いれば

$$\frac{d}{dx} \int_0^h U(x) f\left(\frac{y}{h}\right) dy + V = 0$$

ここで,

$$\eta = y/h \quad (7)$$

と置くと次式を得る。

$$\alpha \frac{d}{dx} (Uh) = -V \quad (8)$$

ここに,

$$\alpha = \int_0^1 f(\eta) d\eta \quad (9)$$

である。平均流速, $\bar{u}$, は

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = U \int_0^1 f d\eta = \alpha U \quad (10)$$

であり, Morton & Taylor⁵⁾により導入された混合係数の概念, 即ち, 下層からの流入速度は断面内の平均流速に比例する, を用いれば, 式(8)は式(11)のように書き直される。

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d}{dx} (Uh) &= -V = E \bar{u} \\ \frac{d}{dx} (Uh) &= EU \end{aligned} \quad (11)$$

ここに, E : 混合係数 である。

次いで, 式(5)を水深方向に積分する。微分・積分の順序の変換は, 式(11)を求めた場合と同様にして可能であり, 次のように表わすことができる。

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \rho u dy + \rho v \Big|_{y=0}^{y=h} = 0$$

式(3)より p を求め上式に代入すれば式(12)を得る。

$$\frac{d}{dx} (\alpha \rho_w h U) + \frac{d}{dx} [\beta h (P - \rho_w) U] = -\rho_w V = \alpha \rho_w E U \quad (12)$$

ここに,

$$\beta = \int_0^1 m f \, d\eta \quad (13)$$

式(12)の左辺第1項は、式(11)より右辺に等しいことが導かれる。従つて、式(12)は以下のように変形される。

$$\frac{d}{dx} (\rho_w U) = \rho_w \frac{d}{dx} (h U)$$

上式を変形するにあたり式(11)を考慮すれば、式(12)は最終的には式(14)のように書き直される。

$$\frac{dP}{dx} = \frac{(\rho_w - P)E}{h} \quad (14)$$

同様に式(6)を水深方向に積分する。その際、本論文においては圧力勾配の項は微小であると考え無視する。

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \rho u^2 dy + \rho uv \Big|_{y=0}^{y=h} + \tau \Big|_{y=0}^{y=h} = 0 \quad (15)$$

式(15)において、 $y=h$ において $u=0$, $y=0$ において $v=0$ であるから、左辺第2項は消失する。剪断応力 τ は $y=0$ において零であるが、 $y=h$ においても零となるような流速分布を仮定する。

$$\tau_{y=h} = 0 \quad (16)$$

式(15)に速度分布・密度分布の相似則を代入すれば次式を得ることができる。

$$\gamma \rho_w \frac{d}{dx} (h U^2) + \delta \frac{d}{dx} \{ h (P - \rho_w) U^2 \} = 0 \quad (17)$$

ただし、

$$\gamma = \int_0^1 f^2 d\eta, \quad \delta = \int_0^1 m f^2 d\eta \quad (18)$$

である。

以上の考察より得られた基本式は式(11), (14), (17)の3式である。未知数は h , U , P の3つであり、混合係数 E を定数と考えれば、式(11), (14), (17)を解析的に解くことができるが、得られる解は実測と一致した傾向を示さない。 E は Ellison & Turner⁶⁾ により実験的に解明されているように、Richardson 数の関数であり、当然場所的な変数である。従つて、混合係数 E の変動の影響を考察するために、数値積分を行なつて解を見出すことを考える。この際の未知数は、 h , U , P の微係数であり、式(11), (14), (17)には1次の微係数のみが含まれ、次のように書き表わされる。

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\rho_w - P}{h} E \quad (19)$$

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{U}{h} \frac{\gamma \rho_w E}{\gamma \rho_w - \delta (\rho_w - P)} \quad (19)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2\gamma \rho_w - \delta (\rho_w - P)}{\gamma \rho_w - \delta (\rho_w - P)} \cdot E \quad (20)$$

式(14), (19), (20)を差分近似式で示せば, 数値計算の基本式が次のように求まる。この際に, 下記の置換を施し, 式を無次元化する。

$$\bar{P} = P/\rho_0, \quad \bar{U} = U/U_0, \quad \bar{H} = h/h_0, \quad \bar{X} = X/h_0 \quad (21)$$

ここに, ρ_0, U_0, h_0 は噴出口における密度, 速度, 水深の値である。

$$\bar{P}_{i+1} = \bar{P}_i + \frac{\frac{\rho_w}{\rho_0} - \bar{P}_i}{\bar{H}_i} E_i \Delta \bar{X} \quad (22)$$

$$\bar{U}_{i+1} = \bar{U}_i - \frac{\bar{U}}{\bar{H}} \frac{\gamma \frac{\rho_w}{\rho_0} E_i}{\gamma \frac{\rho_w}{\rho_0} - \delta (\frac{\rho_w}{\rho_0} - \bar{P}_i)} \Delta \bar{X} \quad (23)$$

$$\bar{H}_{i+1} = \bar{H}_i + \frac{2\gamma \frac{\rho_w}{\rho_0} - \delta (\frac{\rho_w}{\rho_0} - \bar{P}_i)}{\gamma \frac{\rho_w}{\rho_0} - \delta (\frac{\rho_w}{\rho_0} - \bar{P}_i)} E_i \Delta \bar{X} \quad (24)$$

ここに, 添字 i は i 地点における値を示し, i と $(i+1)$ との区間間隔を $\Delta \bar{X}$ とする。

2 諸定数の決定

流速分布を表わす函数 $f(\eta)$ を決定する境界条件は, 式(16)を考慮し

$$\begin{cases} f(0) = 1, & f(1) = 0 \\ f'(0) = 0, & f'(1) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

である。従つて, $f(\eta)$ は 3 次式で示され, 次のように決定される。

$$f(\eta) = (\eta-1)^2 (2\eta+1) \quad (26)$$

密度分布を示す函数 $m(\eta)$ は, 温水放流の場合を想定し, 林らが参考文献 1) で発表しているところを採用する。

$$m(\eta) = e^{-3\eta} \quad (27)$$

計算途中に必要となる諸定数は, 式(26), (27) を用いて次のように算出される。

$$\begin{cases} \alpha = \int_0^1 f \, d\eta = 0.5 \\ \gamma = \int_0^1 f^2 \, d\eta = 0.371 \\ \delta = \int_0^1 m f^2 \, d\eta = 0.207 \\ \theta = \int_0^1 m \, d\eta = 0.317 \end{cases} \quad (28)$$

3 実験結果との比較

理論値の算出は、各地点における Richardson 数, R_i

$$R_i = \frac{\theta \frac{\rho_w/\rho_o - \bar{P}}{\rho_w/\rho_o} \bar{H} g h_o}{\alpha^2 \bar{U}^2 U_o^2}$$

を求め、それに対応する混合係数 E を Ellison & Turner の実験結果より定め、式 (22), (23) を用いて行なつた。 R_i と E との関係を図-2 に示す。

比較に用いた実験結果は和田・片野⁷⁾により発表されたものである。参考文献7) で使われた温度差は約 1.0 °C であるので、密度差に換算して 2/1000 を用いた。流れの形成領域の長さ X_0 は、通常の噴流問題においても実験的に定めねばならない。温水放流の場合に就いては、この問題に関して明確な実験結果が発表されていないので、本論文ではとりあえず流れの形成領域は無視して計算を実行した。計算に際して用いた差分の間隔 $\Delta \bar{X}$ は 0.02, 0.06, 0.1, 0.2 の 4 種類である。実測資料の存する領域、即ち $0 \leq \bar{X} \leq 40$ では、4 種類の

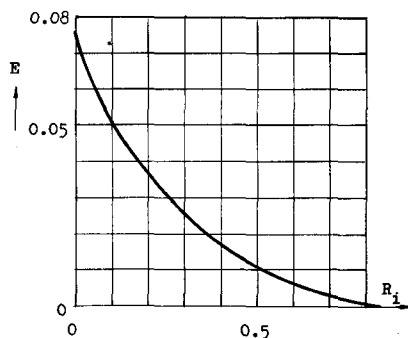


Fig.-2 Relationship between E and R_i by Ellison and Turner

$\Delta \bar{X}$ に対する従属変数 $\bar{P}$, $\bar{U}$, $\bar{H}$ の値は 2 桁までは一致し、グラフ上における差異は殆んどない。

流速及び上層水深に関し、計算値と実測値との比較を図-3 から図-6 に示す。文献7) においては表層平均流速が掲げられているが、速度分布の相似性を仮定すれば表面流速との比を用いても同一である。流速変化は約 10 % の誤差内にあり、 $10 < x/h_o < 20$ の領域で差異が最大となつている。上層水深の変化は、実測値とのズレが系統的にみられ、 x/h_o の値が 30 を越えると相違が増大する。上下

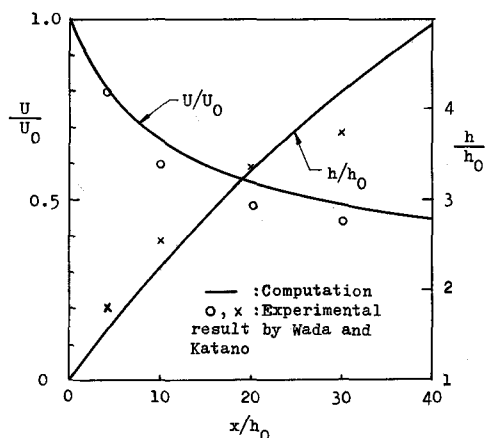


Fig.-3 Comparison for the Case of $U_0=25$ cm/sec

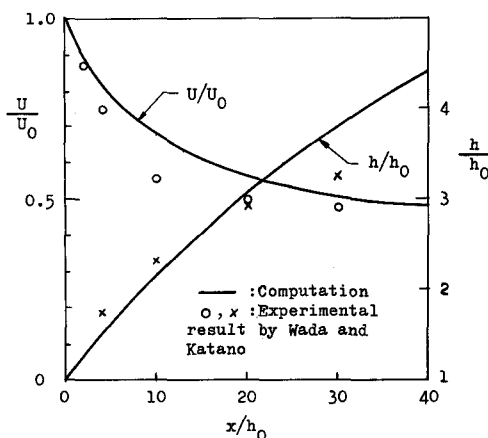


Fig.-4 Comparison for the Case of $U_0=20$ cm/sec

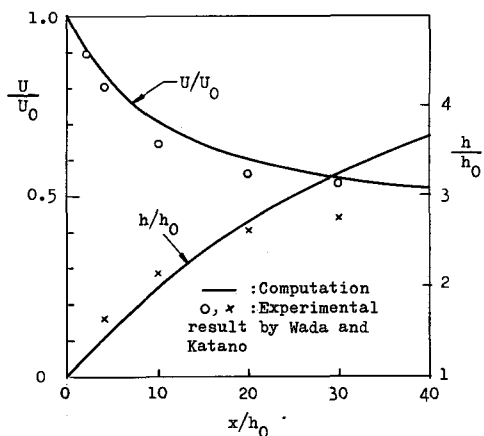


Fig.-5 Comparison for the Case of $U_0=15$ cm/sec

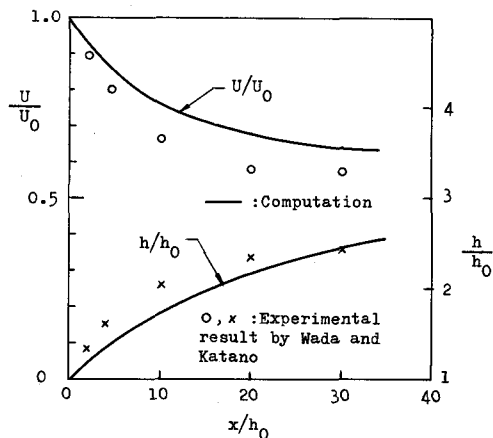


Fig.-6 Comparison for the Case of $U_0=10$ cm/sec

層の境界面の判定方法，精度にも問題があると思われるが，現時点においては明確な原因は解明されていない。図-7には放水口下流における混合係数の変化を掲げる。実験値との相違は大きい，文献7)に示されている Ri と E との関係も Ellison & Turner の実験結果とかなりズレているので，図-7のみより計算法の検定を行なうことはできない。

なお，東大紛争のため，種々の仮定に対する検証の実験を行なうことが不可能であつたのは残念である。

参 考 文 献

- 1) 林・首藤 他，第13回海岸工学講演会講演集，1966. Proc. of 12th Congress, IAHR, Fort Collins, Colorado, U.S.A., 1967.
- 2) 和田・片野他，Proc. of 10th Conference on Coastal Engineering, Tokyo, 1966. 第14回海岸工学講演会講演集，1967. 第12回水理講演会講演集，1968.
- 3) 林，第18回応用力学連合講演会 論文抄録，1968.
- 4) 日野，Transactions of JSCE, No. 86, October, 1962.
- 5) Morton and Taylor, Proc. Royal Soc. A, vol. 234, 1956.
- 6) Ellison and Turner, J. Fluid Mech, vol. 6, Pt. 3, Oct., 1959.
- 7) 和田・片野，第23回年次学術講演会，土木学会，1968.

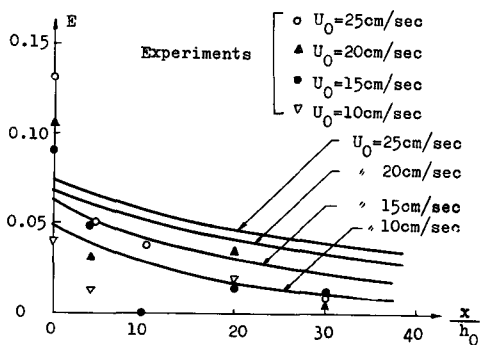


Fig.-7 Variation of E along Jet Axis