

水で満たされていない集水暗きよの取水量について

九州大学工学部 上 田 年 比 古*

同 上 ○杉 尾 哲**

1. まえがき

水平な上面が湛水で被われている均一半無限浸透領域内に円形暗きよがあり、円形暗きよの内部が水で満たされていない場合（以下、未満水暗きよという）を考える。従来このような未満水暗きよの取水量の算定には、暗きよ周壁の上端とか暗きよ中心点の圧力が大気圧の水で満たされていると考えて、被圧円形暗きよの式である Muskat¹⁾式あるいは Kirkham²⁾式によつて算定しているようである。しかしこの場合、未満水状態の円形暗きよの周壁は等ポテンシャル線とはならないので誤差が生ずるものと考えられる。

本報は Darcy の法則が適用できる範囲における未満水暗きよについて近似的解析解を求め、これによつて取水量の算定図表を作成し、砂モデルによる実験から解析結果が実験結果とほぼ一致することを確認め、さらに従来近似算定法について検討を行なつたものである。

2. 基礎式

浸透流の解析に複素ポテンシャルを利用し、流れの場の座標軸を図-1 のようにとつて慣用の記号を使えば、2次元非回転定常流の基礎理論から次式が成り立つ。

$$z = x + i y, \quad W = \Phi + i \Psi \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\ v &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\Phi = k H = k \{ (P/w) - x \} \quad \dots\dots\dots (3)$$

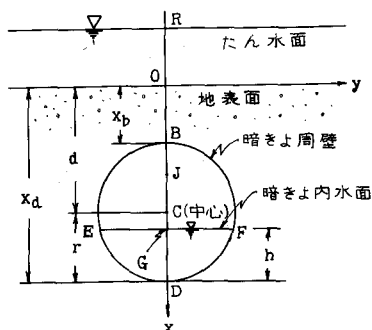


図-1 未満水円形暗きよの流れの場 (その1)

ここに H は浸透領域内の任意点 x の全水頭、p はその点の圧力である。

次に図-1 において、暗きよ内が満水（ $h=2r$ ，ここに h は暗きよ内水深，r は暗きよ半径）の場合には暗きよ周壁は等ポテンシャル線である。したがつて、この浸透流は y 軸と暗きよ周壁で与えられる一つの円形等ポテンシャル線との間の Potential Flow で、これは図-2 のように暗きよ内の一点 A（ $x=a$ ， $y=0$ ）に流入点をもち y 軸に対して対称な位置 A 点（ $x=-a$ ， $y=0$ ）に流出点をもつ Potential Flow と等しくなる。この複素ポテンシャルは

$$W = C_1 \cdot \ln \{ (z-a)/(z+a) \} + C_2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに C_1 ， C_2 は実定数である。また式-4 を解析して求めた満水状態の円形暗きよ取水量 Q と流入点の位置 a は

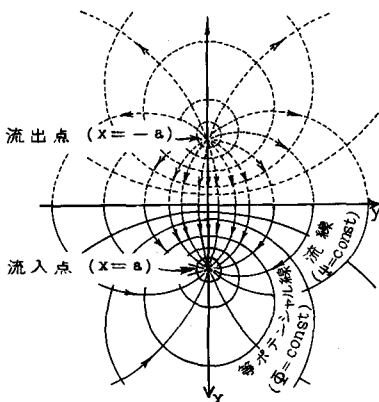


図-2 満水状態の流線網

* 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室 正会員 ** 九州大学助手 同教室 正会員

$$Q = 2 \pi k \Delta H / \ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$a = \sqrt{d^2 - r^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに ΔH は暗きよ内と地表面との水頭差で、暗きよ中心の圧力を p_0 とすれば $\Delta H = H_0 + d - (p_0 / w)$ で表わされる。

3. 未満水円形暗きよの取水量

3-1 近似的解析の考え方

図-1 に示すように暗きよ内に水深 h の水がある場合の暗きよへの流入量を考えてみよう。ここに暗きよ周壁の圧力分布は $\widehat{EBF}$ 間で大気圧に等しく、 $\widehat{EDF}$ 間では暗きよ内水深による静水圧分布をなす。したがって速度ポテンシャルは式-8 より $\widehat{BE}$ および $\widehat{BF}$ 間では

$$\Phi = k \{ (p_a / w) - x \} = -k \cdot x \quad (p_a: \text{大気圧で } 0)$$

となつて深さ方向に減少し、 $\widehat{EDF}$ 間では

$$\Phi = k \{ h - x_d \} \quad (x_d: D \text{ 点の } x \text{ 座標})$$

の等ポテンシャルとなる。すなわち満水状態の円形暗きよの場合と違つて暗きよ周壁は等ポテンシャル線とはならない。したがつてこの場合の浸透流は図-2 に示すものと異なつてくる。このような円形暗きよ周壁のポテンシャル分布に対する流れの厳密解を求めることは困難であると考えられ、ここでは次にのべる考えのもとに近似解を求めることにした。

図-3 の点線の円群は図-2 の浸透流の等ポテンシャル円群と同じものとする。また図の円 $BE'DF$ は与えられた暗きよ(図-1 の円 BD)である。いま図-3 において円 BD の暗きよ周壁の速度ポテンシャルと同じ深さにおいて同じポテンシャルをもつ点線の等ポテンシャル円群上の点をとつて結んだものを $\widehat{BE'D'F'B}$ とする。すなわち $\widehat{ED'F}$ 間は等ポテンシャルであるから $\widehat{ED'F}$ は D 点を通る点線の等ポテンシャル線にそい、 $\widehat{BE'}$ 間はポテンシャルが深さ方向に減少するので $\widehat{BE'}$ のようになるであろう。このように、 $\widehat{BE'D'F'B}$ は図-2 の浸透領域内のポテンシャルと同じ値をもつ閉曲線でありしたがつて $\widehat{BE'D'F'B}$ に対する流線は図-2 の浸透流の流線と等しくなる。本解析では円 BD への流入量すなわち求める取水量を近似的に $\widehat{BE'D'F'B}$ への流入量に等しいとしてこの流入量を算定するものである。いまこの算定誤差すなわち円 BD の流入量と $\widehat{BE'D'F'B}$ の流入量の差を考えると、 $\widehat{BE'D'F'B}$ は円 BD の中に図-3 の点々の部分だけ余分に砂がたまつてゐることから、 $\widehat{BE'D'F'B}$ への流入量は円 BD のそれよりやや少なめの量を与えることが推察されるが、以下においてこの誤差を検討してみよう。まず $h/2r = 0, 0.2, 0.5$ および 0.7 の四つの場合におけるそれぞれの $\widehat{BE'D'F'B}$ に相当する曲線を作図で求めると図-4 の実線のようになる。この図から

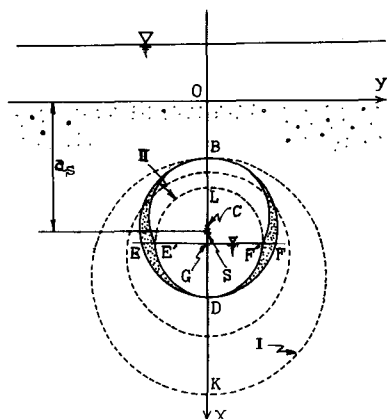


図-3 未満水円形暗きよの流れの場(その2)
(Bは点線で示す等ポテンシャル円群の流入点。円BDは円形暗きよ。Cは中心)

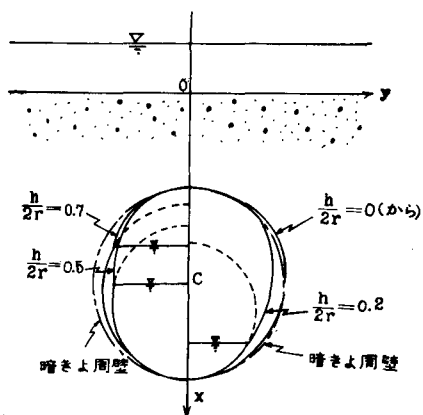


図-4 未満水円形暗きよの流れの場(その3)
(実線は本解析でとった各水深の近似断面)

わかるように、 $h/2r = 0$ （から）の時）の $B'E'D'F'B$ は暗きよ周壁にほぼ一致しており、この場合の誤差はきわめて小さいと考えられる。また満水時には両者は一致するから、誤差が最大となるのは $h/2r = 0.5$ 付近であろう。したがっていま $r/d = 0.2$ における $h/2r = 0.5$ の断面 $B'E'D'F'B$ と暗きよ周壁（円 $B'D$ ）とを等しい値の等ポテンシャル線とした場合の浸透流量を、被膜抵抗体を用いた電気モデルにより測定すると、前者は後者より 3.52% 少なくなつた。

この結果は $B'E'D'F'B$ および円 $B'D$ を等ポテンシャルとした点で実際とは異つてはいるが、上記の砂のつまっているための誤差の程度はこれで推定できると考えられる。また $h/2r = 0.5$ 付近で誤差が最大となることも考えると、本解析結果はほぼ満足できる近似解であるといえよう。

3-2 解析

さて図-3の $B'E'D'F'B$ に対する浸透流すなわち S を流入点とする半無限領域内の浸透流（図-2の流れ）について考えると、浸透領域内の流線は流入点 S に集中するので、連続の条件からこの浸透領域内の S を含む任意の閉曲線に流入する流量はすべて等しい。ここに $B'E'D'F'B$ は流入点 S を含む閉曲線であるから、その流入量すなわち取水量は図-3の点線で示すどの等ポテンシャル線に対する流入量とも等しくなる。したがって B 点を通る等ポテンシャル線・円 $B'K$ （図-3のⅠ）あるいは D 点を通る等ポテンシャル線・円 $D'L$ （図-3のⅡ）に対する流入量を求めればよい。Ⅰ、Ⅱの等ポテンシャル線の半径をそれぞれ r_I 、 r_{II} 、中心の位置を d_I 、 d_{II} とすれば、この流入量 Q_N と流入点の位置 a_S は式-5、6より

$$\left\{ \begin{array}{l} (Q_N/2\pi k) = \Delta H_I / \ln \{ (d_I + \sqrt{d_I^2 - r_I^2}) / r_I \} = \Delta H_{II} / \ln \{ (d_{II} + \sqrt{d_{II}^2 - r_{II}^2}) / r_{II} \} \\ (a_S) = \sqrt{d_I^2 - r_I^2} = \sqrt{d_{II}^2 - r_{II}^2} \\ (x_b) = d_I - r_I = d - r \\ (x_d) = d_{II} + r_{II} = d + r \end{array} \right.$$

..... (7)

..... (8)

..... (9)

..... (10)

ここに ΔH_I および ΔH_{II} は地表面とⅠおよびⅡの等ポテンシャル線との水頭差であり、
 $\Delta H_I = H_0 - (-x_b) = H_0 + d - r$ 、 $\Delta H_{II} = H_0 - (-x_d + h) = H_0 + d + r - h$ 。
 したがって、式-7～10を連立に解いて d_I 、 d_{II} 、 r_I および r_{II} を求めれば、式-7のオ-式より目的の Q_N をうる。すなわち式-7～10は未満水円形暗きよの取水量算定式である。

いま算定に便利のようにこの計算図表を作成しよう。まず図表作成のための変数を考えると、式-8～10より d_I/d 、 r_I/d 、 d_{II}/d および r_{II}/d がそれぞれ r/d と a_S/d との関数で表わされることがわかる。したがって、これらを式-7に代入すると a_S/d は与えられた $\Delta H_I/\Delta H_{II}$ と r/d により表わされ、式-7のオ-式より、 $Q_N/k\Delta H_I$ は a_S/d と r/d によつて表わせる。

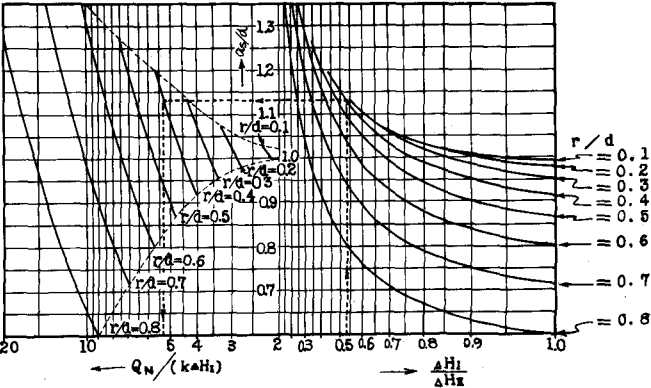


図-5 未満水円形暗きよ取水量の計算図表
 （破線は計算過程を示す）

以上の考察にしたがつて変数を取り、算定結果をPlot

して Q_N の計算図表・図-5をえた。なおこの右図の横軸は使用頻度の高いと思われる $r/d = 0.1 \sim 0.5$ の部分のみやすくするために、 $\log \{ 10 (1 - \Delta H_I / \Delta H_{II}) + 1 \}$ の目盛りを使用している。いまたとえば図-1において $H_0 = 1 \text{ m}$ 、 $d = 5 \text{ m}$ 、 $r = 2 \text{ m}$ 、 $h = 0.5 \text{ m}$ 、 $k = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ とすれば本図表より $Q_N = 7.45 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ がえられる(計算過程を図-5の破線に示す)。

さて以上の解析結果による取水量の算定値の一部を図-6に示す。ここに $h/2r = 1$ は暗きよ内が水で満たされて、しかも暗きよ周壁上端の圧力が大気圧の場合に相当し、式-5の被圧円形暗きよの、この条件での結果と同じになる。さて、この図から $h/2r$ が小になるにつれ $Q_N/(k \cdot \Delta H_I)$ は増加し、この増加は H_0/d が小さくなるほど、また r/d が大きくなるほど大きくなる。なお r/d が小さく、 H_0/d が大きいと暗きよ内水深の相違による取水量の变化はほとんどなくなる。

4. 実験による検討

未満水状態の暗きよ取水量を図-7のような砂モデル実験によつて測定し以上の解析結果を検討した。なおこのモデルの長方形浸透領域と半無限浸透領域との被圧円形暗きよの取水量の誤差を著者らの理論式より求めてみると0.2%以下となつたので、このモデルの領域で十分半無限浸透領域とみなせると考えた。また透水係数は被圧暗きよの状態の測定流量を式-5に代入して求めた値を用いた。これらの測定結果の $Q/(k \cdot \Delta H_I)$ を $\Delta H_I / \Delta H_{II}$ に対してPlotすると図-8のようになる。これによると前述のように、本解析結果すなわち $B'E'D'F'B$ への流入量は円B Dのそれよりやや小さめの値を与えており、その誤差は本実験の場合には $h/2r = 0.7$ 付近が最大となつていた。またこの場合の本解析結果はほぼ2.5%小となり、前述の電気モデルの実験結果の3.52%小にた値がえられた。なお全般的にみて実験と本解析結果とはほぼよい一致を示しているといえよう。次の参考のために、暗きよ内水深を無視し、暗きよ中心あるいは暗きよ上端の圧力を大気圧として被圧円形暗きよ式(ここでは式-5を

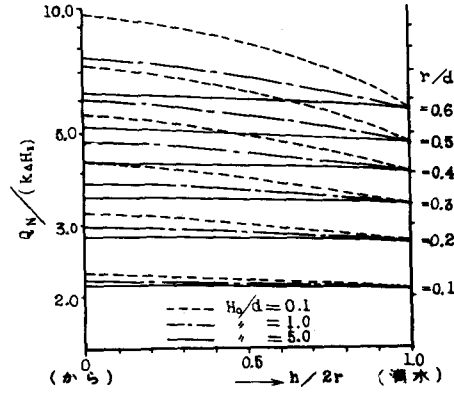


図-6 未満水円形暗きよの取水量算定結果

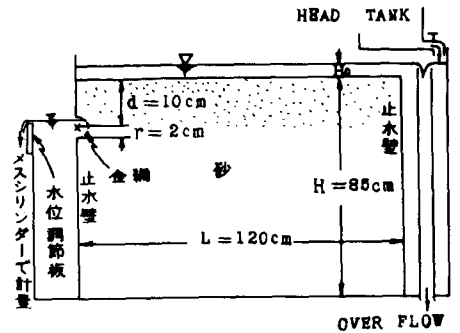


図-7 実験装置

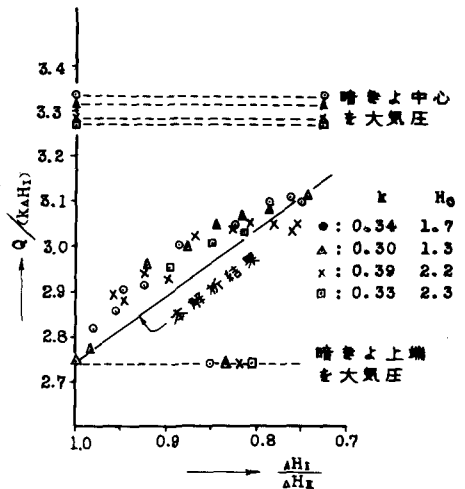


図-8 実験結果との比較

用いた)による算定値を破線に示している。

5. 被圧円形暗きよ式を代用した場合の検討

前述したように、暗きよ内が水で満たされていない場合の取水量の算定として、従来は暗きよ内水深を無視し暗きよ内のある点を大気圧として被圧円形暗きよに対する式により算定されているようである。ここでは、この近似的な算定値の誤差を検討してみよう。

被圧円形暗きよ式として式-5を用い、大気圧とおく点を暗きよ中心、流入点および周壁の上端として求めた流入量と式-7~10の算定結果との誤差を求めてみよう。まず暗きよ内が水で満たされている場合に、暗きよ中心流入点および周壁の上端の圧力を大気圧とした場合の暗きよ内と地表面との水頭差はそれぞれ

$$\Delta H_C = H_0 + d, \Delta H_S = H_0 + \sqrt{d^2 - r^2} \quad \text{および}$$

$$\Delta H_B = H_0 + d - r \quad \text{となるから、そのときの取水}$$

Q_C, Q_S および Q_B は式-5より

$$Q_C = 2\pi k (H_0 + d) / \ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \}$$

$$Q_S = 2\pi k (H_0 + \sqrt{d^2 - r^2}) / \ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \}$$

$$Q_B = 2\pi k (H_0 + d - r) / \ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \}$$

で表わされる。以上の各式と式-7~10の算式結果 Q

との誤差 $(Q_C - Q_N) / Q_N, (Q_S - Q_N) / Q_N$ および $-(Q_B - Q_N) / Q_N$ を $H_0/d = 0.5$ について図示すると図-9となる。これによると、 r/d が大となるほど誤差が大きくなる。なおからの場合に着目すれば、暗きよ流入点を大気圧とした場合が比較的誤差が小さいといえる。

また $h/2r = 0.5$ について算定した図-10によると、

いずれの場合も H_0/d が小さくなるにつれて誤差は大きくなる。図-9からわかるように、被圧円形暗きよ式を使用する場合、大気圧の点をいずれにとつても、たとえある水深で誤差が少なくなつたとしても、全般を通じてみれば、かなり大きな誤差を生ずるといえる。

いまあくまで被圧円形暗きよ式を用いて取水量の算定を行なおうとした場合、その算定誤差を少なくする方法を考えてみよう。図-1についてみると、未満水円形暗きよでは地表面からの浸透流が、B点では $k \cdot \overline{RB}$ のポテンシャル差で、また $\widehat{EDF}$ 間は $k \cdot \overline{RG}$ のポテンシャル差で、 $\widehat{BE}$ 間はその中間のポテンシャル差で流入するから、この流入量が $\widehat{BED}$ 間をすべて同じポテンシャル差 $k \cdot \overline{RJ}$ (J は BG 間のある一点) で流入する場合の流入量 (すなわち J 点を大気圧とする水で暗きよ内が満たされている場合の流入量) と等しくなる J 点が存在するであろう。いまこの J 点として、 B, G 点の位置の幾何平均 J_1 と B 点より $0.35 \times \overline{BG}$ だけ下の位置 J_2 にとり、この J_1, J_2 を大気圧とした被圧

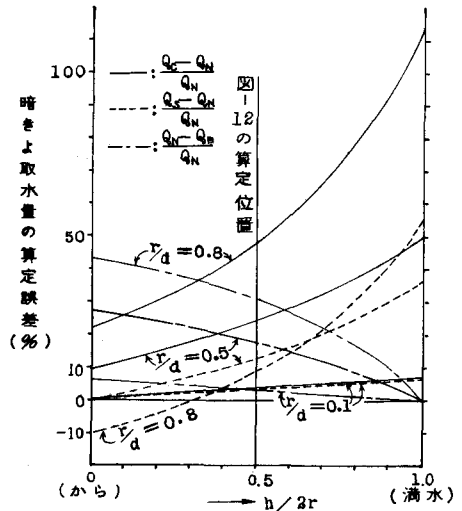


図-9 被圧円形暗きよ式による未満水円形暗きよの取水算定誤差(その1)
(いずれも $H_0/d = 0.5$ における算定値)

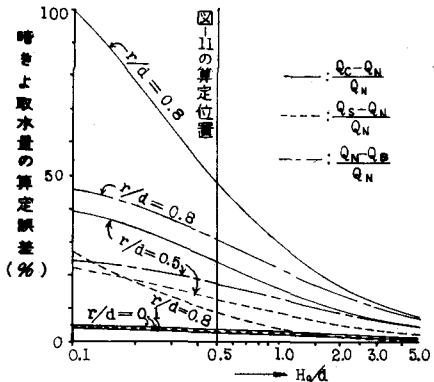


図-10 被圧円形暗きよ式による未満水円形暗きよの取水算定誤差(その2)
(いずれも $h/2r = 0.5$ における算定値)

円形暗きよ式-5より算定した誤差を $H_0/d = 0.5$ および 0.1 について図示すると図-11となる。ここに集水暗きよとして一般に使われる範囲は $r/d \leq 0.5$ と考えられるが、図-11によると、この範囲でかつ $H_0/d \geq 0.1$ (図-10から $H_0/d < 0.1$ では誤差が大きくなる)においては、 J_1 および J_2 のいずれを大気圧としても Q_N との誤差を±5%以内におさえることができ、 J_1 を大気圧とした場合の $r/d \leq 0.5$ 、 $H_0/d \geq 0.5$ では±1%以下の誤差でかなり正確に Q_N を近似できる。

6. むすび

以上によつて、暗きよ内が水で満たされていない場合の暗きよ取水量の近似解を求め、この計算図表を作成した。本解析による取水量は砂モデルの実験から検討してやや少なめの結果ではあるが、ほぼよい結果をうるといえる。なお本解析の結果、暗きよ内水深の減少による取水量の増加傾向などがわかった。またこの場合の取水量

を、従来とられているように暗きよ中心、暗きよ流入点あるいは暗きよ周壁上端を大気圧とする、被圧暗きよの取水量にとつた場合の算定誤差は、暗きよ内水深がある状態のとき小さくなくても全般的にみて、いずれもかなり誤差が大きい。しかし暗きよ周壁上端と暗きよ内水面位置の幾何平均の位置または暗きよ内空間部の高さの0.35倍だけ暗きよ上端より下の位置を大気圧として被圧円形暗きよ式を適用すれば、普通考えられる暗きよ設置状態でほぼよい精度で本解析による取水量を近似することができる。

終りに、本研究にご援助いただいた九州産業大学工学部・崎山正常助教授ならびに実験および整理にご協力いただいた本学工学部・谷一義氏、土工土木学科4年・有田建男君に深謝します。なお上記の計算には、本学中央計数施設のOKITAC 5090 H電子計算機を使用した。

参 考 文 献

- (1) M. Muskat: "The flow of homogeneous fluids through porous media," p. 175 ~ 181, Mc Graw-Hill, 1946.
- (2) D. Kirkham: "Flow of ponded water into drain tubes in soil overlying an impervious layer", Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 30, p. 369 ~ 385, 1949.
- (3) 上田, 杉尾: "暗きよ中心と写像流入点との相違を考慮した半無限領域内の被圧円形暗きよの取水量", 九州大学工学集報 41巻, 第5号, p. 764 ~ 768, 昭和43年10月.
- (4) 上田, 杉尾: "長方形浸透領域内の集水暗きよの取水量", 第19回全国水道研究発表会講演集, 日本水道協会, p. 104 ~ 105, 昭和43年5月.

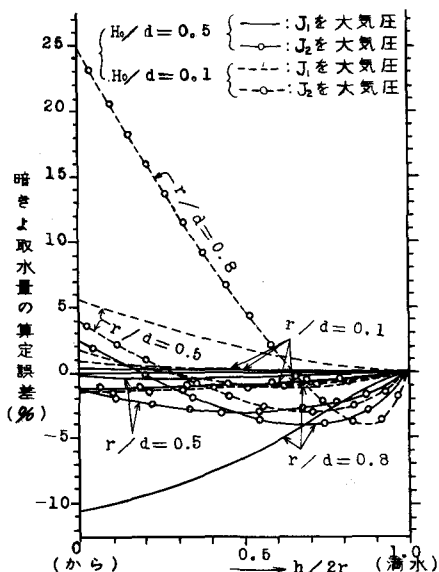


図-11 被圧円形暗きよ式による未満水円形暗きよの取水量の算定誤差(その3)