非圧縮性ニュートン流体の非ダルシー流

東京大学農学部　正会員　岡本雅美

1　まえがき

いま、ダルシー流を、有孔体を飽和して通過する低流速（低レイノルズ数）のニュートン流体の流れと定義すれば、ニュートン流体であつても、不飽和の、または高流速（高レイノルズ数）の流れは非ダルシー流となる。

ミクロ（有孔体の間ゲキを満たして流れるニュートン流体の「粒子」のオーダー）には、あの複雑なナビエ・ストークス式を満足すると考えられるニュートン流体が、間ゲキの形状が、きわめて複雑な境界条件を形づくつている有孔体を通過するときに受ける流動抵抗が、マクロには、（流量）流速の1乗に比例するという、きわめて単純な実験則（ダルシー則）に帰着することは、先人の興味をそそつた。

そして、本間・高木・中村・Irmay・村本・吉田らによつて、ダルシー流の流れの場としての有孔体の構造の特異な内容、ミクロな物理量とマクロな物理量との関連と区別の認識が深められ、ダルシー流の力学的性質の解明が進められた。

2　問題の限定

いま、簡単のために、有孔体を通過する流れは定常であり、有孔体の構造自体も、圧密などによる体積変化をうけず幾何学的構造が安定であり、かつ、流体は非圧縮性ニュートン流体とする。

まず、飽和・低流速の場合について、吉田[1]にしたがつて述べておく。

3　ミクロとマクロの物理量とその変換

ミクロとマクロの物理量と、その関係を示すと、Tableのごとくである。

マクロ			ミクロ	
流量流速	U_i	$n_i U_i = \frac{1}{\delta S}\int_{(\delta S_\ell)} n_i u_i \, d\sigma$	流速	u_i
間ゲキ流速	W_i	$n_i W_i = \frac{1}{\delta S_\ell}\int_{(\delta S_\ell)} n_i u_i \, d\sigma$		
圧力	P	$P = \frac{1}{\delta S_\ell}\int_{(\delta S_\ell)} p \, d\sigma$	圧力	p
運動量密度		$\alpha \rho W_i = \frac{1}{n_j W_j \lambda \delta S}\int_{(\delta S_\ell)} \rho n_i u_c u_j \, d\sigma$		
間ゲキ率	λ	$\lambda = \frac{\delta S_\ell}{\delta S} = \frac{\delta V_\ell}{\delta V}$		

Tableにおいて、i，jはベクトルやテンソルの成分を表わし、δSはマクロな物理量を連続ならしめる最少の面積であり、δS_ℓはδSの中で流体の占める面積を意味し、$d\sigma$は流体中にとられた微少な面積であり、以下、同様な添字の使い方をすることにする。

αは運動量補正係数、ρは流体の密度、n_iはδSの単位法線ベクトルである。

4　連続の方程式

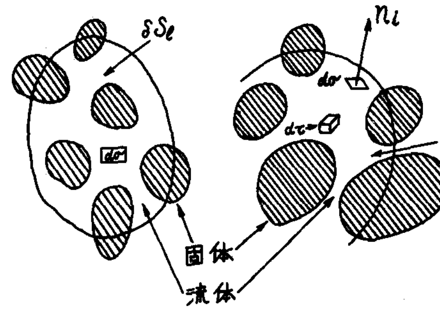
ミクロな連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(V_\ell)} \rho \, d\tau = -\int_{(S_\ell)} \rho n_i u_i \, d\sigma \qquad (1)$$

を、マクロのそれに変換すると、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda W_i) = 0 \quad \text{または、} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (2)$$

となる。



5　運動の方程式

ミクロな運動の方程式（ナビエ・ストークス式）は、

$$\frac{d}{dt}\int_{(V_\ell)} \rho u_i \, d\tau = \int_{(V_\ell)} F_i \, d\tau + \int_{(S_\ell + S_s)} n_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} d\sigma \qquad (3)$$

ただし、F_iは外力、p_{ij}は応力テンソルであり、添字のsは有孔体を形づくつている固体を表わす。

いま、右辺第２項を、できる限りマクロな量に変換すれば、

$$-\int_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x_j} dV - \int_{(V)} F_j (1-\lambda) dV + \int_{(S_s)} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial n} - n_j p_D\right) d\sigma \qquad (4)$$

となる。ここにp_Dはpの静圧からの差、μは粘性係数である。

この式で、マクロな量に変換できないで残つた第３項は、ミクロには、間ゲキの表面での速度分布と圧力分布による、マサツ抵抗と圧力抵抗を意味し、全体として、有孔体がそれを通過する流体におよぼす抵抗力、すなわち、マクロには体積力なる流動抗力である。

この流動抗力（密度）をD_iと書けば、第３項は次のようになる。

$$\int_{(V)} D_i \lambda \, dV$$

かくして、次のようなマクロな運動の方程式が得られる。

$$F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda D_i = 0 \qquad (5)$$

ダルシー則は、$D_i = -\frac{\mu}{k} W_i$ 　の場合である。kは透水係数である。

6　飽和・高流速の場合

有孔体を通る流れの流速が増して、レイノルズ数が大きくなると、ダルシー則は破れて、マクロな圧力損失がマクロな（流量）流速の２乗の項をふくむようになり、間ゲキ流が乱流になつたためであると解釈されていた。だが、一様流中におかれた球の抵抗則（オセーン則）を考慮すれば、層流でも抵抗力が速度の２乗に比例する項をふくみうることが分る。

だから、有孔体の抵抗則の速度の２乗の項を、直接、乱流の発生のみに結びつけることは、吉田[1]のいうごとく、なお検討を要する。

いま、ミクロな速度（u_i）と圧力（p）を、時間的に変わらぬ成分（横線ツキ）と変動成分（v，q）とにわけて考える。マクロな流速や圧力は、ミクロなそれらを空間的のみならず時間的にも平均した量であることから、流速や圧力のミクロからマクロへの変換は、Tableにおいて、u_iを$\overline{u_i}$、pを$\bar{p}$で置換すれば足りる。

したがつて、マクロな連続の方程式は、低流速の場合と同じである。

しかし、運動の方程式においては、応力として、レイノルズ応力が加わり、

$$p_{ij} = -\bar{p}\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \rho\overline{v_i v_j} \qquad (6)$$

としなければならない。それ故、できる限り、マクロな量に変換すると、次のようになる。

$$\int_{(V)} \left\{ F_j(1-\lambda) - \frac{\partial P}{\partial x_j} \right\} dV + \int_{(S_s)} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial n} - n_j p_D\right) d\sigma - \int_{(V_l)} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\overline{v_i v_j}\right) d\tau \qquad (7)$$

上式において、第２項は前述の低流速の場合に述べたように、マサツ抵抗と圧力抵抗であり、第３項がレイノルズ応力による乱流抵抗である。マクロな流動抗力（密度）D_i を導入して、第２項と第３項の和を $\int_{(V)} \lambda D_i\, dV$ とおくと、マクロな運動の方程式は、５式と同じ形式で書かれる。

従来得られていた、マクロの速度の２乗の項をふくむ実験則は、以上述べたミクロからマクロへの変換過程から分るように、ミクロの速度の２乗の項が、直接、マクロの速度の２乗の項に変換されるのではないことに注意せよ。

7　不飽和・低流速の場合

不飽和流では、流量流速（ U_i ）と間ゲキ流速（ W_i ）との関係は、次のようになる。

$$U_i = m W_i$$

ただし、mは容積含水比である。

まず、ミクロの連続の方程式をマクロのそれに変換すると、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(m W_i) = 0 \qquad \text{または、} \qquad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (6)$$

となる。

不飽和の場合には、ミクロの運動の方程式（３式）の右辺第２項の積分範囲に、気体と液体の境界面（S_a）が新たに加わる。そして、４式は

$$\int_{(V)} \left\{ F - \frac{\partial P}{\partial x_j} \right\} dV + \int_{(S_s)} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial n} - n_j p_D\right) d\sigma - \int_{(S_a)} n_j p_D\, d\sigma \qquad (7)$$

となり、有孔体中の液体の形づくるメニスカスのために（ $p_D \neq 0$ ）、不飽和流に固有の抵抗が現われることが分る。

参考文献

１）吉田昭二：浸透流の基礎方程式、農土研、別冊１，P19－26（1960）