

特性曲線法による河床変動計算について

建設省土木研究所 正員 須賀 堯 三

1 はじめに

河川の河床変動の問題は、河道計画上、あるいは河川構造物設計上の重要問題であり、この研究に対する実際面からの要請は大きい。最近の活発な研究を促進する主因をなしているものと思われる。この課題の主要な問題点は、流砂関数、アーマーリング効果、および補給土砂量とその粒度構成などであり、さらには一元的な取扱いから三次元的な問題への拡張である。しかし、ここでは、ひとまずこのような現象を考える立場から離れて、たんに計算法の問題として扱い、特性曲線による方法について二・三の考察を試みる。

取り扱われる方程式は偏微分方程式であるが、これを常微分方程式におきかえができること、および攪乱の伝播から影響領域が明確に定められることなど、特性曲線法が非常にすぐれた利点を持っていることは広く知られている。したがって、特性曲線法は各方面で有力な方法として盛んに用いられ、例えば、波の解析などに応用されてその効力をいかんなく発揮している。河床変動の場合にも、水の流れを定常流として扱った岩垣の先駆的な研究(1956)^[1]があり、ついで de Vries の一般の場合についての近似解法(1965)^[2]などがある。ここでは、基礎方程式の各項のオーダーとその役割とを考慮し、一般的に特性曲線法により河床変動計算を進める場合の問題点について、一般的な考察を行う。また、複断面水路の河床変動計算法についてもふれる。

2 基礎方程式と一般の場合の特性曲線

通常の河床変動計算では、洪水波形および潮位変動を考慮する場合でも、水の流れは十分な精度を期待して定流として扱われることが多い。しかし、非常にシャープな洪水とか、あるいはダム欠壊や河口砂州の崩壊のように貯留量が問題とされる場合には、基礎方程式において省略のないことが望ましい。また、条件は一般性を失わない範囲で単純な方が望ましいから、水路は直線とし、断面は長方形を仮定する。未知量として、河床高 Z 、水深 h 、および平均流速 v の 3 つを考え、独立変数としては、距離 x と時間 t である。3 つの基礎式は、水流の運動および連続式、河床の連続式で与えられ、それぞれ、

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{\partial Z}{\partial x} = -fI = \left(-f \frac{v_*^3}{f h}\right) \quad (1)$$

$$\beta \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} = -h v \frac{dB}{dx} \quad (2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + X \frac{\partial v}{\partial x} = Y \quad (3)$$

のように現わされる。ここに、 I はエネルギー勾配であるが、川幅 B が漸変する水路でない場合は、形状損失を考慮する必要がある。 f は重力加速度、 v_* は摩擦速度である。定数 α および β はともに 1 であるが、後の考察の便宜のために設けられたものである。川幅 B は x のみの関数とする。 X およ

び Y は、単位幅あたりの流砂量 q_T として一般的に Brown 型の関数形、

$$q_T = a_s \{(\rho_s/\rho) - 1\}^{-P} \mathcal{F}^{-P} dm^{1-P} v_*^{2P+1} \quad (4)$$

を用い、粗度としてシェジ-公式 $v_* = (\sqrt{\mathcal{F}}/c) v$ を用いれば、

$$X = \frac{1+2P}{1-\lambda} a_s \{(\rho_s/\rho) - 1\}^{-P} \sqrt{\mathcal{F}} dm^{1-P} C^{-(1+2P)} v^{2P} \quad (5)$$

$$Y = -\frac{a_s \{(\rho_s/\rho) - 1\}^{-P} \sqrt{\mathcal{F}}}{(1-\lambda)} dm^{-(P-1)} C^{-(1+2P)} v^{1+2P} \left\{ B \frac{dB}{dx} + \frac{(1+2P)}{CP} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{(P-1)}{dm^P} \frac{\partial dm}{\partial x} \right\} \quad (6)$$

である。ここに、 a_s は定数、 ρ_s および ρ はそれぞれ土砂および水の密度、 dm は平均粒径、 P は定数、 C はシェジ-の定数、および λ は間隙率（一定）である。なお、未知量の一つである水深 h の代りに流量 Q を用いると分・合流など便利な場合もあるが、計算法は同様であるから省略する。

3 つの未知量に対する dv, dh , および dz のそれぞれの全微分式を用いると、3 つの従属変数の x および t に関する偏微分形に対し、6 つの関係式が成り立ち、それらの間に次の関係、

$$\begin{pmatrix} \alpha & v & 0 & \mathcal{F} & 0 & \mathcal{F} \\ 0 & h & \beta & v & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \\ h_t \\ h_x \\ Z_t \\ Z_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{F}I \\ -hv \, dB/dx \\ Y \\ dv \\ dh \\ dz \end{pmatrix} \quad (7)$$

が成立する。この場合 3 本の特性曲線の方法は係数の行列式をゼロとおいた次式、

$$\alpha\beta(dx)^3 - (\alpha+\beta)v(dx)^2 dt - (\mathcal{F}h-v^2+\beta\mathcal{F}X)dx(dt)^2 + v\mathcal{F}X(dt)^3 = 0 \quad (8)$$

の 3 根として与えられる。de Vries は無次元量 $\phi = X/h$ はオランダのライン河支川における値では $\phi = 10^{-5} \sim 10^{-6}$ であり、一般に十分小さいから無視できるとして、はじめに (8) 式の最後の項を省略して、 $C_{1,2} = (dx/dt)_{1,2} = v \pm \sqrt{\mathcal{F}h}$ ($\alpha=\beta=1$ の場合) を得、ついで、この C_1 および C_2 を用いて三次式の根と係数の関係から、 $C_3 = \mathcal{F}vX/(\mathcal{F}h-v^2)$ を得た。

ϕ の値は、佐藤・吉川・芦田公式を適用し、(5) 式において、 $P=1$, $a_s=0.628$ ($n \geq 0.025, F=1$), $\rho_s=2.6$, $\lambda=0.4$ とすれば、 $\phi = 2(\sqrt{\mathcal{F}}/C)^3 \cdot F_r^2$ であり、 $C=4.0$ 付近のときには、 $\phi \approx 10^{-3} F_r^2$ 程度である。一方、Brown 公式 ($P=2$, $a_s=10$) によれば、 $\phi \approx (h/dm) 10^{-4} F_r^4 \approx F_r^4 (dm=0.1 \sim 0.5 \text{ mm})$ となる。de Vries の近似解は流砂量の多い水路ではフルード数 F_r の小さいときのみに限定される。また、(8) 式は厳密に解くことも可能と思われる。

3 流れを定常流と考えた場合の特性曲線

通常の場合、河川の河床変動を取り扱うときは、流れを不等流と考えることができる。de Vries は、(8) 式において、 $\alpha=\beta=0$ として、 $C_{1,2} = \pm\infty$, $C_3 = \mathcal{F}vX/(\mathcal{F}h-v^2)$ を得た。一方、岩垣はこれより約 10 年前に同様に $\alpha=\beta=0$ として、(1)~(3) 式から巧みに $\partial Z/\partial t + A' \partial Z/\partial x = B'$ の形に変形して、ただちに特性曲線 $C_3=A'$ を得ている。これらの理論は、河床変化に伴う攪乱の伝播速度に対し、水流の攪乱は瞬間的に伝播するという仮定に基づくものである。計算は通常の不等流計算のほかに特性曲線の計

算を行う必要があり、手数はかかるが、常に影響範囲内を考慮しながら計算を実施しているわけで、この方法が秀れていることは一般に認められているところである。

4 不定項を考慮する場合（3に対する参考解析）

流れを定常流とした場合には、特性曲線は2本が無限大となり、いわば1本のみのいわゆる片押しの方法で計算することになる。通常の河川の洪水において、流れの運動方程式の不定項は 10^{-5} 程度のオーダーであって十分無視しうるほど小さい。しかし、この場合に(1)式の不定項を考慮することになれば、特性曲線は2本でくる。

この場合、未知量は z および v とする。流れの運動方程式の(1)式は、連続条件($\beta=0$)を含めて、

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v - \frac{fQ}{Bv^2}\right) \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial Z}{\partial x} + = f \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{dB}{B} - I\right) \tag{9}$$

となる。(3)式と(9)式より Z を消去すれば、

$$f \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(v - \frac{fQ}{Bv^2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \phi(x, t; v, v_x, v_t) \tag{10}$$

これは双曲線型の線型2階偏微分方程式である。2次微分の係数の行列式がゼロ、すなわち

$$\begin{vmatrix} fX - \left(v - \frac{fQ}{Bv^2}\right) & -\alpha \\ dx & dt \\ 0 & dx \end{vmatrix} = fX(dt)^2 + \left(v - \frac{fQ}{Bv^2}\right) dt dx - \alpha(dx)^2 = 0 \tag{11}$$

が2本の特性曲線の方を与え、 $dt \neq 0$ であれば、

$$C_{2,3} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{F^2} - 1\right) v \pm \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\left(\frac{1}{F^2} - 1\right)^2 v^2 + 4\alpha fX} \tag{12}$$

である。 $X=0$ とすれば、 $C_3=0$ となるが、このように C_3 は図-1の $x-y$ 平面上においてかなり鉛直に近い線であり、河床 乱の伝播速度が非常に遅いことを示す。このことに関する限り、図-2のde Vriesの結果と同様である。ところが、運動方程式の不定項を無視したde Vriesの結果では、 $C_2=\infty$ になっているのに対し、オーダー的にはとるにたらない不定項を考慮すると、特性曲線 C_2 は、ほぼ

$$C_2 \approx -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{F^2} - 1\right) v$$

程度の値を示し、非常に大きな違いが生じる。この方法は原理的には影響領域がはっきりして秀れているようにみえる。しかし、いったん差分式にしたときには、通常の場合、不定項は他の項の誤差程度であるが、それが特性曲線の方を定めるうえに重要な役割を演ずるので問題が生じる。(12)式にみられるように α の値の変化は特に特性曲線 C_2 に直接影響を及ぼす。不定項が運動方程式においてオーダー的に十分大きくない場合には、特性曲線 C_2 が少々変化しても、時間 Δt を十分短かくとって、それに伴う断面特

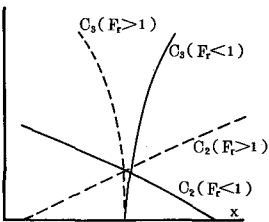


図-1 (12)式の特性曲線

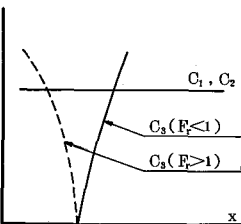


図-2 de Vriesの特性曲線

性や水理量の変化が極くわずかである場合に限られるべきであろう。また、計算の安定条件は影響領域内、すなわち攪乱域にあればよいということで、一般に $\Delta x / \Delta t \geq C_1$ が認められているが、これに付いても影響領域が不安定というところから同様の議論がなされてよいであろう。

5 不定流の場合の特性曲線

流れを定常流として取り扱うことが適当でない場合、たとえば鉄砲水による河床変動、ダム欠壊時の流れによる河床変動、あるいは河口砂州の崩壊などの問題を取り扱うときには、流れを不定流と考えるのが適当であろう。この場合には2節の取り扱いが適当するのであるが、4節に述べられているように、流れの運動方程式の中の不定項の役割に問題があるので、この項を省略し、(2)・(3)式では x および t 方向の変化がオーダー的に大きい差がないのでこれを考慮する。

(8)式より

$$dt \{ \beta v (dx/dt)^2 + (gh - v^2 + \beta g X) (dx/dt) - g v x \} = 0$$

であるから、8本の特性曲線は、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \infty \quad (dt = 0) \\ C_{2,3} &= -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{Fr^2} - 1 + \frac{\beta g X}{v^2} \right) v \pm \sqrt{\left\{ \frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{Fr^2} - 1 + \frac{\beta g X}{v^2} \right) v \right\}^2 + \frac{g X}{\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。 $C_{2,3}$ の特性曲線は、フルード数 $Fr < 1$ のとき、 C_3 は $+0$ に近い値をとり、 $Fr > 1$ のとき、 C_2 は $+\infty$ 、 C_3 は -0 に近い値となる。この場合も β の値によって特性曲線の方法は大きく影響を受けることは(13)式において β の入っている位置をみれば明らかである。しかし、 h_1 は(2)式において $Qx/B = hv_x + v_h x + hv B_x$ と同じオーダーであり、特性曲線の方法は安定していると考えられる。

(7)式によれば、

$$[v_x \text{ の分子 }] = \begin{pmatrix} 0 & -gI & 0 & g & 0 & g \\ 0 & -hv \, dB/dx & 1 & v & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ dt & dv & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dh & dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & dz & 0 & 0 & dt & dx \end{pmatrix}$$

$= -gI(dx)^2 dt - g(dz + dh)dx dt + (v g I + Y - g h v \, dB/dx) dx(dt)^2 + g v \, dz(dt)^2 - v Y(dt)^3$ である。 $[v_x \text{ の分子}] = 0$ として $g(dt)^3$ で割れば、 $(dt \approx 0)$

$$I C^2 + \left(\frac{dz}{dt} + \frac{dh}{dt} \right) C - \left(I v + \frac{Y}{g} - h v \frac{dB}{dx} \right) C - v \frac{dz}{dt} + v \frac{Y}{g} = 0 \quad (14)$$

したがって、

$$\begin{aligned} C_2 \text{ 上で;} \quad & (C_2 - v_2) dz + C_2 dh + [I_2 C_2^2 - \{ I_2 v_2 + Y_2/g - h_2 v_2 (dB/dx)_2 \} C_2 + v_2 Y_2/g] dt = 0 \\ C_3 \text{ 上で;} \quad & (C_3 - v_3) dz + C_3 dh + [I_3 C_3^2 - \{ I_3 v_3 + Y_3/g - h_3 v_3 (dB/dx)_3 \} C_3 + v_3 Y_3/g] dt = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

が成り立つから、 dz および dh が計算される。 du は特性曲線 $C_1 (= \infty, dt = 0)$ 上で成り立つ次式

$$v \, dv/dx + g \, dh/dx + g \, dz/dx = -gI \quad (16)$$

图-3 格子法 ($F_r < 1$)

すなわち、a 流れは一元流（横断方向の水面は一様、横断方向の流れはない）、b 水路は直線、c 低水路および高水敷ともに直方形断面、d 高水敷の川幅は低水路の川幅に比し十分大きく、低水路と高水敷のそれぞれの流れの間に働くせん断は無視できるものとする。

$$Z_{\ell x} + h_{\ell x} + (v_{\ell}/g) v_{\ell x} = -I_{\ell} \quad (17)$$

$$Z_{hx} + h_{hx} + (v_h/g) v_{hx} = -I_h \quad (18)$$

$$z_p + h_p = z_h + h_h \quad (h_p > h_h > 0) \quad (19)$$

$$z_p + h_p = z_h + h_h \quad (h_p > h_h > 0) \quad (19)$$

$$v_{\ell} h_{\ell} B_{\ell} + v_h h_h B_h = Q \quad (= \text{const.}) \quad (20)$$

$$Z_{\ell t} + X_{\ell} v_x = Y_{\ell} \quad (21)$$

$$Z_{ht} + X_{ht} v_x = Y_{ht} \quad (22)$$

$$v_\ell B_\ell \frac{\partial Z_\ell}{\partial x} + v_h B_h \frac{\partial Z_h}{\partial x} + \left\{ \frac{v_\ell B_\ell + v_h B_h}{g} v_\ell - h_\ell B_\ell \right\} \frac{\partial v_\ell}{\partial x} - h_h B_h \frac{\partial v_h}{\partial x} = F \quad (23)$$

$$F = (v_\ell h_\ell B_{\ell y} + v_h h_h B_{h y}) - (v_\ell B_\ell + v_h B_h) I_\ell \quad (24)$$

$$v_{\ell} v_{\ell x} - v_h v_{hx} = g(I_h - I_{\ell}) \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (v_{\ell} B_{\ell} + v_h B_h) v_{\ell} / g - h_{\ell} B_{\ell} & 0 & -h_h B_h & 0 & B_{\ell} B_{\ell} & 0 & v_h B_h \\ 0 & v_{\ell} & 0 & -v_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{\ell} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_h & 0 & 0 & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\ell t} \\ v_{\ell x} \\ v_{ht} \\ v_{hx} \\ z_{\ell t} \\ z_{\ell x} \\ z_{ht} \\ z_{hx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ g(I_h - I_{\ell}) \\ Y_{\ell} \\ Y_h \\ dv_{\ell} \\ dv_h \\ dz_{\ell} \\ dz_h \end{bmatrix} \quad (26)$$

—49—

$$(dx)(dt)^2 \{ (v_{\ell} h_h B_h + v_h h_{\ell} B_{\ell} - (v_{\ell} B_{\ell} + v_h B_h) v_{\ell} v_h / g) dx - v_{\ell} v_h (B_{\ell} X_{\ell} + B_h X_h) dt \} = 0 \quad (27)$$

から, $C_{1,2} = \pm \infty (dt = 0)$, $C_3 = 0 (dx = 0)$

$$C_4 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_4 = \frac{v_{\ell} v_h (B_{\ell} X_{\ell} + B_h X_h)}{v_{\ell} h_h B_h + v_h h_{\ell} B_{\ell} - (v_{\ell} B_{\ell} + v_h B_h) v_{\ell} v_h / g} \quad (28)$$

となる。一方、(27)式から $v_{\ell x}$ の式を求め、その分子をゼロとおくことにより、特性曲線 C_4 上で、

$$\{ g(I_h - I_{\ell}) h_h B_h - v_h F \} C_4 - v_h \{ v_{\ell} B_{\ell} Y_{\ell} v_h B_h Y_h + g(I_h - I_{\ell}) X_h B_h \} + v_h (v_{\ell} B_{\ell} \frac{dz_{\ell}}{dt} + v_h B_h \frac{dz_h}{dt}) = 0 \quad (29)$$

が成り立つことがわかる。また、 C_3 上では(27)式または(28)式、 $C_{1,2}$ 上では(27)式および(28)式をそれぞれ常微分に改めた式が成り立つ。

複断面水路の場合には、高水敷の河床変動が小さく、ほとんど無視できることが多い。そこで、高水敷河床高 z_h を固定し、与量として取り扱うときは、5つの未知量 ($z_{\ell}, h_{\ell}, v_{\ell}, h_h$, および v_h) に対し、ほぼ同様の解析を行って、8本の特性曲線

$$\left. \begin{aligned} C_{1,2} &= \pm \infty (dt = 0) \\ C_4 &= \frac{v_{\ell} v_h X_{\ell} B_{\ell}}{h_{\ell} B_{\ell} v_h + h_h B_h v_{\ell} - (v_{\ell} B_{\ell} + v_h B_h) v_{\ell} v_h / g} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

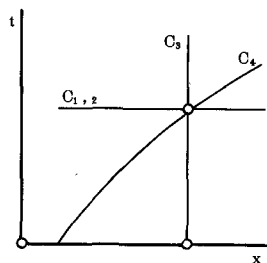


図-4 複断面の場合

が得られる。特性曲線 C_4 上では、

$$v_{\ell} v_h B_{\ell} Y_{\ell} - v_{\ell} v_h B_{\ell} \frac{dz_{\ell}}{dt} + \{ F' v_h - h_h B_h g(I_h - I_{\ell}) \} C_4 = 0 \quad (31)$$

ここに、

$$F' = v_{\ell} h_{\ell} \frac{dB_{\ell}}{dx} + v_h h_h \frac{dB_h}{dx} - v_h B_h \frac{dz_h}{dx} - (v_{\ell} B_{\ell} + v_h B_h) I_{\ell} \quad (32)$$

である。特性曲線 $C_{1,2}$ 上では、同様に(27)式および(28)式をそれぞれ常微分式に改めたものが成り立つ。

不定流の場合には、(27)式の連続条件の代わりに $A_t + Q_x = 0$ を用いるわけであるが、未知量が6つになるためにかなり複雑になる。

7 おわりに

特性曲線法により河床変動解析を行うときの問題点について考察した。特性曲線法は非常に巧妙な方法であり、常に影響領域を考慮して計算を進められる点において、秀れた特性を有する。しかし一方では不連続の伝播という微妙な特性を利用しているために、差分式を用いる段階では、場合によってはその利点が失われることがある。そこで、特性曲線としては或る程度鈍感なものを使用した方が計算が安定することになる。ここでは、このような観点から長方形断面水路で不定流の場合、および複断面水路で定流の場合の河床変動計算の解析を試みた。なお、計算例については講演会当日に御報告する予定である。

〔謝辞〕 特性曲線法による河床変動解析は、昭和42年9月から1年間の米国コロラド州立大学に滞在中行われた研究の一部である。また帰国後、土木研究所の星畑研究員から示唆に富む助言をいただいた。サイモンズ教授はじめ諸教授および星畑研究員に深甚の謝意を表する次第である。

〔参考文献〕(1) Iwagaki, Memories of the Faculty of Eng. Kyoto Univ. 18-3, 1956 (2) de Vries, I.A.H.R. 1965