

# ナイキスト図による河川流出モデルの適合性の判別

北海道大学工学部 正会員 山 岡 勲 岡 点  
同 同 ○藤 田 睦 博 田 隼 人

要旨：降雨を入力、河川流量を出力と考えるとき、両者の関係を明らかに表現する一手法として、周波数伝達関数のベクトル軌跡図（ナイキスト図）を用いる方法を提案する。予め降雨流出系の種々のモデルによるナイキスト図を用意しておけば、これを基にして実際水文観測値からえられる複素平面上のナイキスト点描によつてモデルの適合性の判別ができることを、2、3の計算例で示した。

## 1 周波数伝達関数のベクトル軌跡（ナイキスト図）<sup>1)</sup>

降雨流出系を記述している微分方程式を（1）式の一般形で表わされるとする。

$$K \left( b_n \frac{d^n o}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} o}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{do}{dt} + 0 \right) = \frac{d^l i}{dt^l} \left( a_m \frac{d^m i}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} i}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + i \right) \quad (1)$$

こゝに  $o(t)$  は出力、 $i(t)$  は入力である。（1）式の伝達関数  $G(s)$  は

$$G(s) = \frac{K (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1)}{s^l (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1)} \quad (2)$$

こゝで  $m + l - n \geq 0$  である。 $s = j\omega$  において周波数伝達関数  $G(j\omega)$  を求め、式を整理すると（ $j$  は虚数単位）

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^l} \frac{\{1 + \omega^2(-a_2 - b_2 + a_1 b_1) + \dots\} + j\{\omega(b_1 - a_1) + \omega^2(b_2 a_1 - a_2 b_1) + \dots\}}{\sqrt{(-\omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \dots)^2 + (\omega a_1 - \omega^3 a_3 + \dots)^2}} \quad (3)$$

ベクトル軌跡は  $G(j\omega)$  を複素平面に  $\omega$  の関数としてプロットしたものである。ベクトル軌跡図、伝達関数、微分方程式は一対一に対応

しているから、ナイキスト線図が既知である事は微分方程式が既知であるという事と等価である。ベクトル軌跡の始点の位置は  $\omega \rightarrow 0$  として

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^l} \{1 + j\omega(b_1 - a_1)\} \quad (4)$$

その実数部、虚数部をとると表1のようになる。 $l = 0$  の時の始点は  $K + j0$  で実軸上にあるが  $l \geq 1$  においては始点は総て無限遠方である。その向きを図1に示す。次に  $\omega \rightarrow \infty$  として終点付近の形を調べる。（3）式より

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{K \cdot b_n}{a_m} \frac{1}{(j\omega)^{m+l-n}} \quad (5)$$

$m + l - n = 0$  の場合には終点の位置は  $K b_n / a_m$  となるが、 $m + l - n \geq 1$  の場合には  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0$  となり終点は原点となる。その向きを図2に示す。

表1  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)$

| $l$ | 実 数 部                      | 虚 数 部                      |
|-----|----------------------------|----------------------------|
| 0   | $K$                        | $K\omega(b_1 - a_1)$       |
| 1   | $K(b_1 - a_1)$             | $-K\omega^{-1}$            |
| 2   | $-K\omega^{-2}$            | $-K(b_1 - a_1)\omega^{-1}$ |
| 3   | $-K(b_1 - a_1)\omega^{-2}$ | $K\omega^{-3}$             |
| 4   | $K\omega^{-4}$             | $K(b_1 - a_1)\omega^{-3}$  |

図1 始点付近の形

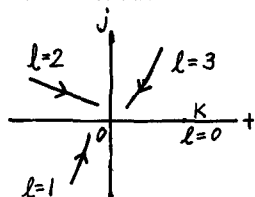
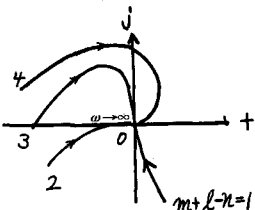


図2 終点付近の形



任意入力  $i(t)$  に対する系の応答が  $o(t)$  であつて、水文学の分野ではこれら結びつける関係が未知である場合が多く伝達関数  $G(s)$  は次式で示される。

$$G(s) = \frac{\int_0^\infty o(t) e^{-st} dt}{\int_0^\infty i(t) e^{-st} dt} \quad (6)$$

したがって周波数伝達関数  $G(j\omega)$  は

$$G(j\omega) = \frac{\int_0^\infty o(t) e^{-j\omega t} dt}{\int_0^\infty i(t) e^{-j\omega t} dt} = \frac{\int_0^\infty o(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty o(t) \sin \omega t dt}{\int_0^\infty i(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty i(t) \sin \omega t dt} \quad (7)$$

ベクトル軌跡は (7) 式を複素平面上にプロットすればよいわけだから同式を実数部と虚数部に分離する。<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^\infty i(t) \cos \omega t dt & B &= \int_0^\infty i(t) \sin \omega t dt \\ C &= \int_0^\infty o(t) \cos \omega t dt & D &= \int_0^\infty o(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とおくと 
$$G(j\omega) = \frac{C - jD}{A - jB} = \frac{AC + BD}{A^2 + B^2} + j \frac{BC - AD}{A^2 + B^2} \quad (9)$$

(8)、(9) 式から実数部と虚数部を各々独立に計算できる。

## 2、河川流出モデルとしての低次要素のナイキスト図

河川流出に関する各種モデルのナイキスト図を前節の手法により作製しておけば観測値によるナイキスト図と比較できるわけである。しかしここでは計算が容易で比較的流出モデルとして適合する低次要素についてナイキスト図を例示する。計算に当つては (8) 式の計算はアナログ計算機の得意とする積分なので A、B、C、D の算出には総てアナログ計算機を使用した。<sup>2)</sup> 3 節の実際河川における観測値の計算も同様である。(北海道大学汎用シミュレーター日立 AL S-2000 使用)。又本節の  $Q(t)$  を求める操作は単に仮定した微分方程式の解を求める作業なので同じくアナログ計算機を使用した。入力簡単にするため総て指数型の式とした。

一次要素

$$\left. \begin{aligned} \frac{do(t)}{dt} + o(t) &= i(t), \quad i(t) = e^{-0.4t} \\ G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + 1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

二次要素

$$10 \frac{d^2 o(t)}{dt^2} + 9 \frac{do(t)}{dt} + o(t) = 2i(t), \quad i(t) = e^{-0.2t} \quad (11)$$

図3 1次系ベクトル軌跡

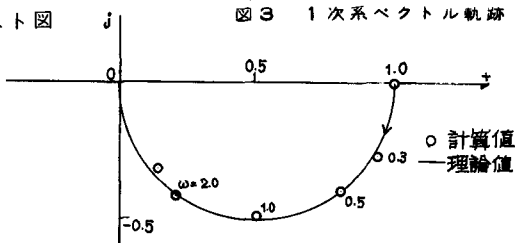


図4 2次系ベクトル軌跡

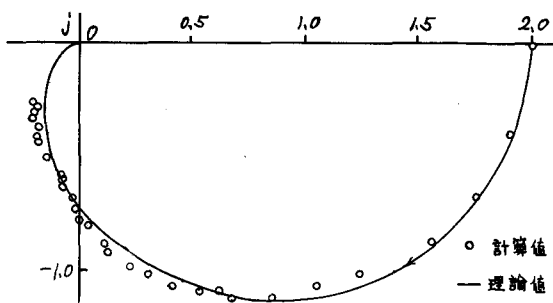
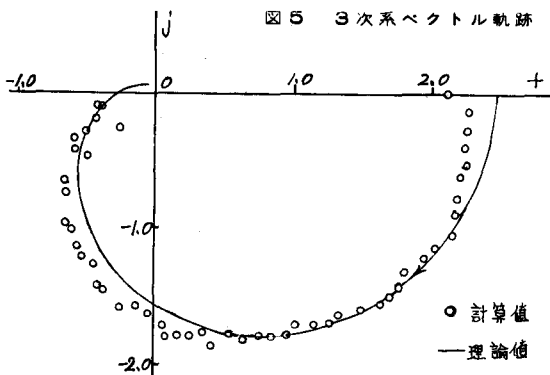


図5 3次系ベクトル軌跡



$$G(j\omega) = \frac{2}{10(j\omega)^2 + 9j\omega + 1}$$

三要素

$$10 \frac{d^3 o(t)}{dt^3} + 19 \frac{d^2 o(t)}{dt^2} + 11 \frac{do(t)}{dt} + 2o(t) = 5i(t), \quad i(t) = e^{-0.3t}$$

$$G(j\omega) = \frac{5}{10(j\omega)^3 + 19(j\omega)^2 + 11j\omega + 2}$$

(12)

ベクトル軌跡の計算結果すなわちナイキスト図を図3～図5に示す。

実用上十分な精度で(8)、(9)式による計算値と理論値は一致している。したがって入力と出力からこれらを結びつけている微分方程式が求められる事も示唆される。

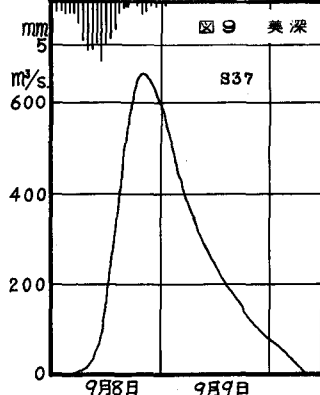
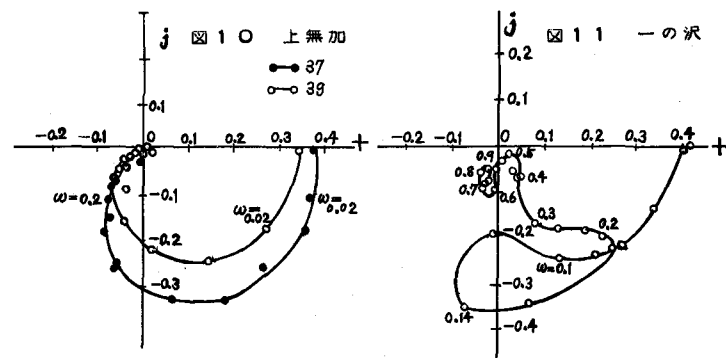
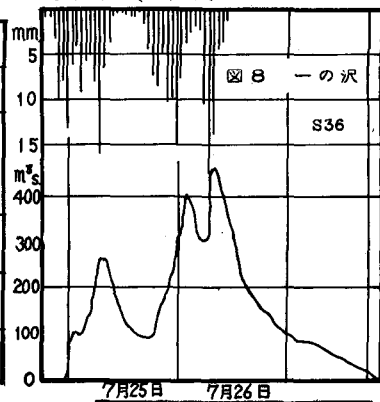
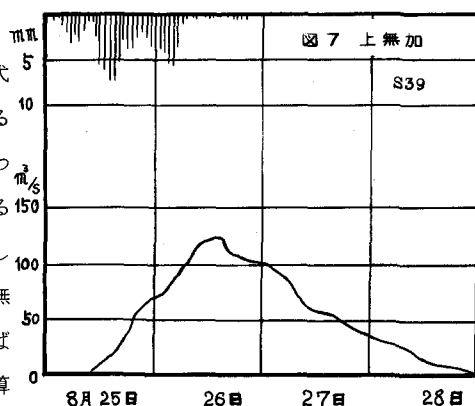
### 3 実際河川における水文観測値によるナイキスト図の特性

ハイドログラフを  $i(t)$ 、実測資料から求めた直接流出量のハイドログラフを  $o(t)$  として、前述の手法に従ってベクトル軌跡を計算した。計算例は上無加地点<sup>3)</sup>(常呂川) 2例、表2 流域面積  
美深地点<sup>4)</sup>(天塩川) 1例、一の沢地点<sup>5)</sup>(豊平川) 1例である。各地点の流域面積を表2に示す。又計算に用いた雨量、流量資料を図6～図9に示す。従来の

|     |                       |
|-----|-----------------------|
| 上無加 | 227.2 km <sup>2</sup> |
| 一の沢 | 432 "                 |
| 美深  | 2899 "                |

降雨流出系においてはベクトル軌跡の始点は実軸上の点である。この事は、(1)式において  $l=0$

の場合を示しており、  
始点の位置は(9)式  
より総降雨量に対する  
総流出量の比、すなわ  
ち流出率を示している  
事がわかる。ただし  
終点に関しては  $\omega$  を無  
限大として計算せねば  
ならず、実際上の計算



においては不可能である。

なお上無加の例によつて初期損失雨量を除去しない場合 (case1) さらに降雨の降り始めと流量の立上り時期を時間をずらして一致させた場合 (case2) のナイキスト図の変化を図13に示す。

美深は従来のユニットグラフ法が比較的適合する地点であり、上

無加は単一 図14 1次系のベクトル軌跡 時間遅れの影響

のユニットグラフが適用できない準線型の地点であり、一の沢は非線型流出を示すといわれている地点である。

#### 4 適合性の判別とユニットグラフの比較

case1のベクトル軌跡の計算例では (図13)、明らかに降雨  $i(t)$  とその流出量  $o(t)$  との間に時間のずれがある。この時間遅れの要素がベクトル軌跡にどのような影響を与えるかを一次系、二次系の例で示す。先ず (13) 式のような一次系を考える。

$$\left. \begin{aligned} T \frac{do_1(t)}{dt} + o_1(t) &= i(t) \\ o(t) &= o_1(t - \tau) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(13) 式で表わされる系の周波数伝達関数  $G(j\omega)$  は

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{Tj\omega + 1} \quad (14)$$

(14) 式に対するベクトル軌跡を図14に示す。  $\tau = 0$  の場合は単に半円形のベクトル軌跡だが、時間遅れ  $\tau$  の影響により原点の周囲にループを描く事がわかる。

次に (15) 式で表わされる二次系について考える。

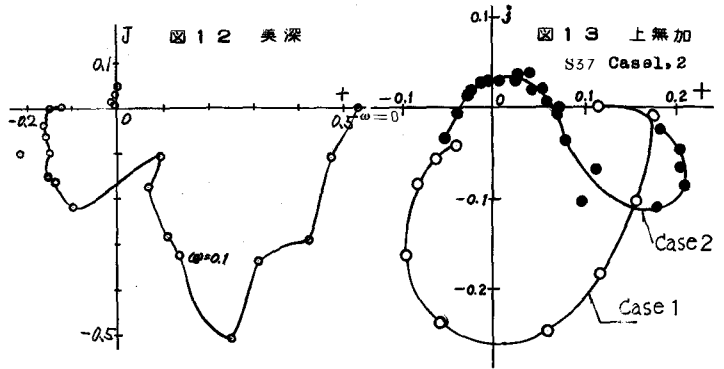


図12 美深

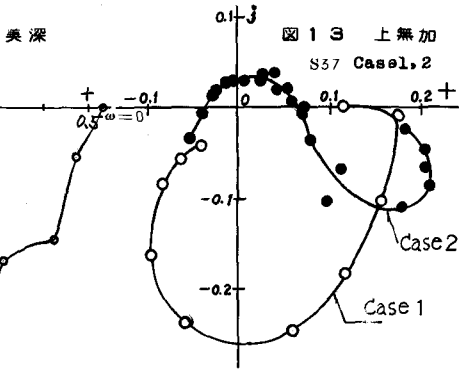


図13 上無加  
S37 Case1,2

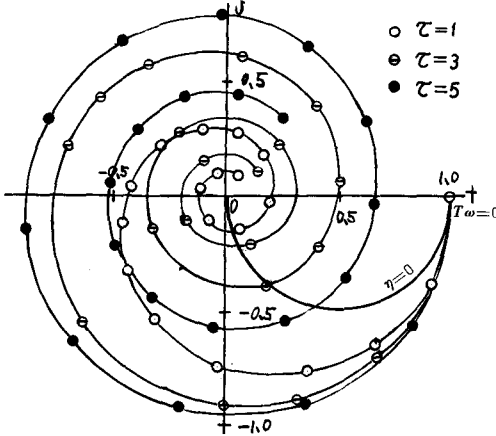


図15 2次系のベクトル軌跡

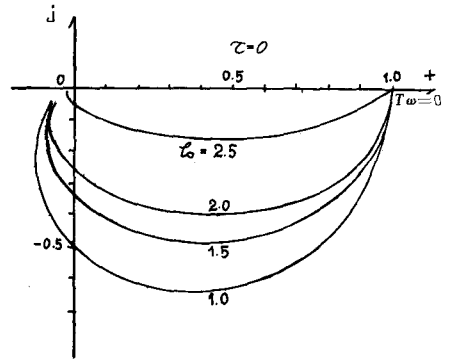
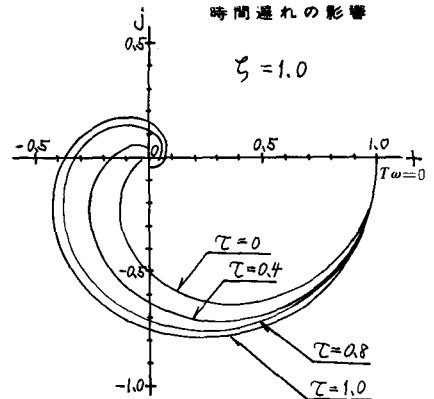


図16 2次系のベクトル軌跡における  
時間遅れの影響



$$T^2 \frac{d^2 o(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{do(t)}{dt} + o(t) = i(t) \quad (15)$$

二次系は  $T$ ,  $\zeta$  の二つのパラメーターにより図 15 のようにそのベクトル軌跡の形を変える。(15) 式は、よく知られている振動の式であつて係数  $\zeta$  の値によつてその解の形は非常に変化するが、求めたベクトル軌跡を (15) 式にあてはめると  $\zeta \geq 1$  で過制振の状態である。図 16 に二次系のベクトル軌跡における時間遅れ  $\tau$  の影響を示す。

case 2 では降雨  $i(t)$  と流出量  $o(t)$  との間に時間遅れが無いが図 13 でわかるとおりそのベクトル軌跡にはやはりループ現象が見られる。図 10-12 の初期損失雨量を除去して降雨量  $i(t)$  と流出量  $o(t)$  との間に時間遅れが無いように見える場合でもナイキスト図には時間遅れ現象が生じる事に注目したい。すなわち時間遅れの意味は初動時間のずれのみではないことがわかる。

一の沢地点のベクトル軌跡は他の地点のベクトル軌跡図に比較して複雑な形をしており、他の二地点と流出機構を異にする事を示す。この地点に対し岸は非線型流出解析の一手法として特性曲線を用いて良い結果を得ている。

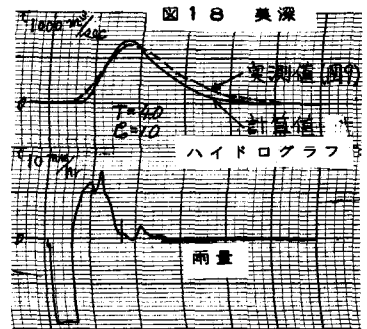
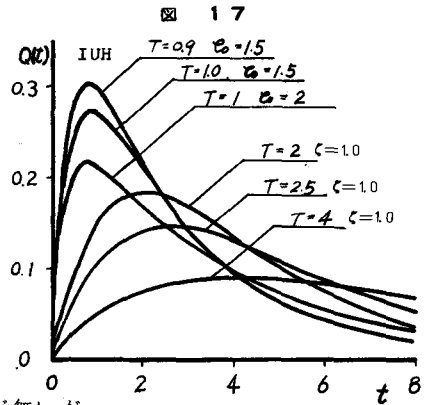
二次系におけるインパルス応答 (Instantaneous Unit Hydrograph, I.U.H.) を求めてみると  $\zeta \geq 1$  として

$$\left. \begin{aligned} o(t) &= Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t} \\ \mu_1, \mu_2 &= \frac{\zeta}{T} \pm \frac{1}{T} \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \zeta > 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$o(t) = (A+Bt)e^{-\frac{1}{T}t} \quad \zeta = 1 \quad (17)$$

(16) (17) 式において  $0t = o = 0$  として係数  $T$ ,  $\zeta$  をパラメーターとして I.U.H. を求めたのが図 17 である。図 15 のナイキスト図における  $T$ ,  $\zeta$  の変化がどの程度ハイドログラフに影響するかを図 17 で確かめる事ができる。なお図 16 の時間遅れは図 17 の I.U.H. を機械的にずらす事と対応する。図 18 は時間遅れを考慮して図 12 の美深のナイキスト図から  $T$ ,  $\zeta$  を求めて二次系で近似した場合の降雨流出の実測値と計算値を比較したものである。このように実測値と観測値はかなり良く適合している。

流出機構の異なる種々のパターンのナイキスト図を予め用意しておけば、モデルの適合性の判別に役立つ。なお 3 節の図 10~12 に示される如く実際の河川の例では高周波において仮定したモデルのナイキスト図とかなり離れるが、このモデルの適合性に及ぼす影響は上の例でもわかるように特に非線形性の強い場合を除いては二次的と考えられるが、きめの細かい適合を得るためには今後次節に述べる要素の結合、非線形性についての研究が必要だと思われる。



## 5 本手法によるモデル選択への展望

本手法によればアナログ計算機を用いて容易にベクトル軌跡を求めることができ、客観的に流出モデルの適合性を判別できる。流出モデルについては、本計算例で使用した二次系モデルでも、係数  $T$ 、 $k$  及び時間遅れ  $\tau$  を調整する事によつてかなり観測値に適合させる事ができた。更にこの手法によつてその系の物理的機構の性質解明の可能性も示唆される。したがつて input-output 問題の最大の欠点である black box の物理的意味の欠如という点を克服できる可能性がある。しかし降雨流出系は複雑な系で、単一の要素ではなく種々の要素が結合した系で、ベクトル軌跡で得られる結果はこれら諸要素の結合した系の総合されたものと考えられる。例えば  $G_1$ 、 $G_2$  という二つの要素の結合を考えても図 19 のように並列結合と直列結合の場合がある。

並列結合の場合は、総合の周波数伝達関数  $G(j\omega)$  は

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) + G_2(j\omega) \quad (18)$$

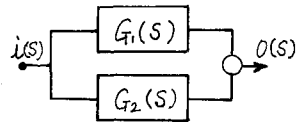
と表わされ、 $G_1$ 、 $G_2$  が既知の場合には  $G_1$ 、 $G_2$  の各ベクトル軌跡からベクトルの和の法則で求める事ができる。又直列結合の場合、 $G(j\omega)$  は

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \quad (19)$$

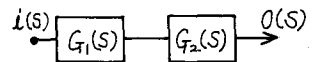
したがつて二つのベクトル軌跡からベクトルの積の法則で求めることができる。しかし物理的機構についての情報が全くない場合は、求めたベクトル軌跡から結合している要素を分離する事は要素が多くなつては不可能である。それゆゑ本手法は系の物理機構の解析と同時にお互いにその欠点を補ないながら進めていく時に最もその効果を表わすものと思われる。

図 19 要素の結合

並列結合



直列結合



## 参考文献

- 1) 自動制御に関する文献、例えば次の文献がある。

榎木義一、砂原善文：自動制御工学、養賢堂

高橋利衛：自動制御の数学、オーム社

A.E.Rogers T.W.Connolly: Analog Computation in Engineering Design, McGraw-Hill

- 2) 藤田陸博：水文学の一手法としての周波数特性のベクトル表示、昭和 43 年度研究発表論文集会 第 25 号、土木学会北海道支部、昭 44-2
- 3) 岸力：河川流出の推算、水文学に関するシンポジウム、日本学術会議特別委員会、災害科学総合研究班河川分科会、1967-2
- 4) 北海道開発局：天塩川流量の検討、昭 40
- 5) 北海道大学工学部河川研究室（岸）：第 2 回洪水予報会議資料、流出率、損失雨量の実例、

1965-11