サージタンクの自励振動に対する理論的研究(2)

九州電力KK土木部　村瀬次男

1．まえがき

水資源工学におけるシュミレーション・テクニックの一例として、こゝ数年来の、著者によるサージタンクの安定問題の理論的研究を挙げることができようか。これは、数学面からいえば、ラプラス変換、逆変換およびフーリェ変換、逆変換の応用である。

本論は、第22回土木学会年次学術講演会（於広島大学）で発表した小論[1]の続編で、非線形要素が2つ以上ある場合の、リミット・サイクルについての解析的研究である。

2：非線形制御系の新解析法

A．Escandeの方法

著者は、Escandeの方法には次のような潜在仮定があるものと考える。

"サージタンクの制水口損失水頭によるリミット・サイクルに対しては、2次の制水口※1と全く等価な1次の制水口※2を常に考えることができる"

こゝで、"等価"ということに次の3つの内容を持たせてみる。

ⓐ先づ第1に、2次、1次の制水口ともリミット・サイクルを生じなければならない

$h_t=\alpha_t\cdot v_t^2\to\alpha_t$ の如何にかゝわらずリミット・サイクルを生じる

$h_t=\overline{\alpha}_t\cdot v_t\to\sigma(\overline{\alpha}_t)=0$ の $\overline{\alpha}_t$ のときのみリミット・サイクルを生じる

v_t：サージタンク内流速、h_t：制水口損失水頭、$\alpha_t=h_t/v_t^2$、$\overline{\alpha}_t=h_t/v_t$、

σ：2次の特性方程式※3の根の実数部

ⓑ前項のリミット・サイクルの振巾および周期は共に等しくなければならない

ⓒまた、制水口損失エネルギーは等しくなければならない

以上、ⓐ、ⓑ、ⓒおよび"正弦波の仮定"※4から、

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{T_s}|\alpha_t v_t^3|\cdot dt=\int_0^{T_s}|\overline{\alpha}_t v_t^2|\cdot dt\\&v_t\fallingdotseq v_{ts}\cdot\sin\omega_s t\\&\sigma(\overline{\alpha}_t)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

をうる。ω：角周波数（或いは、σ に対する虚数部）、添字 s：リミット・サイクルを示す

(1)式は"Escandeの方法"の式的表現である。

逆に、Escandeの方法を用いると、制水口損失水頭によるリミット・サイクルの振巾および周期

※1　$h_t=\alpha_t\cdot v_t^2$ を有する制水口をいう

※2　$h_t=\overline{\alpha}_t\cdot v_t$ を有する制水口をいう

※3　Escandeは電気機械系を全く考えていないので、特性方程式は2次となる

※4　非線形制御系の解析に普通使われている仮定[2]

を求める公式を容易に導くことができる。これを証明してみよう。

今、(1)式を用いると、

$$\left.\begin{aligned} v_{ts} &= \frac{\bar{\alpha}_t}{\alpha_t}\cdot\frac{\int_0^{T_s}|\sin^2\omega_s t|\cdot dt}{\int_0^{T_s}|\sin^3\omega_s t|\cdot dt} = \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{\bar{\alpha}_t}{\alpha_t} \neq 0 \\ \sigma(\bar{\alpha}_t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

である。また、ω_s、T_sはそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} \omega_s &= \omega(\bar{\alpha}_t) \\ T_s &= 2\pi/\omega_s \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

から求めることができる。T：周期（証終）

(2)および(3)式がいわゆる“Escandeの公式”[3),4)]である。

B．著者の方法

著者の方法はEscande の方法の一般的な拡張である。

著者の方法には次のような潜在仮定がある。

“或る非線形要素によるリミット・サイクルに対しては、その非線形要素と全く等価な線形要素を考えることができる場合※5 がある”

こゝで、“等価”ということに次の3つの内容を持たせてみる。

ⓐ先づ第1に、非線形、線形の要素ともリミット・サイクルを生じなければならない

$G_N(s)$ → 必ずリミット・サイクルを生じる

$\bar{G}_N(s)$ → $G(j\omega_s)=0$のときのみリミット・サイクルを生じる

$G(s)$：伝達函数、或いは、電気機械系を考えた特性方程式（$G(s)=1-\bar{G}_N(s)\cdot G_L(s)$）、添字L，N：線形、非線形の要素を示す、bar－：線形化を示す

ⓑ前項のリミット・サイクルの振巾および周期は共に等しくなければならない

ⓒまた、運動量、エネルギー（有効、無効、或いは、全体の）、或いは、エントロピー等の物理量※6は等しくなければならない

以上、ⓐ、ⓑ、ⓒおよび“正弦波の仮定”から、

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{T_s}|W_{N1}|\cdot dt &= \int_0^{T_s}|\bar{W}_{N1}|\cdot dt \\ \int_0^{T_s}|W_{N2}|\cdot dt &= \int_0^{T_s}|\bar{W}_{N2}|\cdot dt \\ &\cdots\cdots \\ \int_0^{T_s}|W_{Nn}|\cdot dt &= \int_0^{T_s}|\bar{W}_{Nn}|\cdot dt \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

※5 非線形要素に物理法則がある場合

※6 基本物理量と仮称する

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta x_1 = G_{x1}(j\omega_s)\cdot\Delta X\\
&\Delta x_2 = G_{x2}(j\omega_s)\cdot\Delta X\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\Delta x_n = G_{xn}(j\omega_s)\cdot\Delta X\\
&\Delta X \doteqdot \Delta X_s\cdot e^{j\omega_s t}\\
&G(j\omega_s) = 0
\end{aligned}\right|
$$

をうる。x：非線形要素の入力、X：正弦波変化を仮定できる変数、W：基本物理量の時間微分値、$G_x(s) = \Delta x / \Delta X$、添字 1，2，・・・，n：非線形要素の No を示す

(4)式は、非線形要素が 2 つ以上ある場合の、“著者の方法”の式的表現である。

逆に、著者の方法を用いると、基本物理量のある場合、非線形要素によるリミット・サイクルの振巾および周期を求めることができる。これを証明してみよう。

今、(4)式を用いると、

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar{\kappa}_1 = \bar{\kappa}_1(\kappa_1,\ \kappa_2,\ \cdot\cdot,\ \kappa_n,\ \Delta X_s,\ Z_0,\ \omega_s)\\
&\bar{\kappa}_2 = \bar{\kappa}_2(\kappa_1,\ \kappa_2,\ \cdot\cdot,\ \kappa_n,\ \Delta X_s,\ Z_0,\ \omega_s)\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\bar{\kappa}_n = \bar{\kappa}_n(\kappa_1,\ \kappa_2,\ \cdot\cdot,\ \kappa_n,\ \Delta X_s,\ Z_0,\ \omega_s)\\
&G_r(\bar{\kappa}_1,\ \bar{\kappa}_2,\ \cdot\cdot,\ \bar{\kappa}_n,\ Z_0,\ \omega_s) = 0\\
&G_i(\bar{\kappa}_1,\ \bar{\kappa}_2,\ \cdot\cdot,\ \bar{\kappa}_n,\ Z_0,\ \omega_s) = 0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (5)
$$

である。κ：W の係数、G_r, G_i：$G(j\omega_s)$ の実数部、虚数部 ($G(j\omega_s) = G_r + j\cdot G_i$)、$Z_0$：初期条件、添字 0：定常値を示す

ΔX_s および ω_s は(5)式を連立に解いて求めることができる。（証終）

3. 著者の方法の応用例

A．水路系の損失水頭によるリミット・サイクル

一般に、水路系の損失水頭には導水路、水圧管路およびサージタンク制水口の 3 種の損失水頭がある。この場合は、(4)および(5)式において、

$$
\left.\begin{aligned}
&x_1 = v\ ,\quad x_2 = v'\ ,\quad x_3 = v_t\\
&X = H_t\\
&Z_0 = v'_0\\
&\kappa_1 = \alpha\ ,\quad \kappa_2 = \alpha'\ ,\quad \kappa_3 = \alpha_t\\
&\bar{\kappa}_1 = \bar{\alpha}\ ,\quad \bar{\kappa}_2 = \bar{\alpha}'\ ,\quad \bar{\kappa}_3 = \bar{\alpha}_t\\
&W_{N1} = \Delta h\cdot v = \alpha\cdot(2v_0 + \Delta v)\cdot\Delta v\cdot v,\\
&W_{N2} = \Delta h'\cdot v' = \alpha'\cdot(2v'_0 + \Delta v')\cdot\Delta v'\cdot v',\\
&W_{N3} = \Delta h_t\cdot v_t = \alpha_t v_t^3\\
&\bar{W}_{N1} = \bar{\alpha}\cdot\Delta v\cdot v\ ,\quad \bar{W}_{N2} = \bar{\alpha}'\cdot\Delta v'\cdot v'\ ,\quad \bar{W}_{N3} = \bar{\alpha}_t\cdot v_t^2
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (6)
$$

とすればよい。　v：管路流速、h：損失水頭、$\alpha = h/v^2$、$\overline{\alpha} = \Delta h/\Delta v$、$H_t$：サージタンク水位、符号 ′：水圧管路を示す、符号なし：導水路を示す

(6)式の$\overline{\alpha}$、$\overline{\alpha}'$、或いは、$\overline{\alpha}_t$が、形式上では、何れも記述函数になっているのは面白い。

B. 水車（或いは、ポンプ）のトルク特性によるリミット・サイクル

水車（或いは、ポンプ）のトルク特性を

$$M = M(\omega, S_R, q, H_e) = M(t)^{※7} \quad \cdots\cdots (7)$$

と、一般的に考える。　S_R：ランナベーンのサーボストローク（ポンプの場合は、$S_R = 0$）、q：流量、H_e：有効落差（或いは、全揚程）、M：水車（或いは、ポンプ）のトルク

この場合は、(4)および(5)式において、

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = \omega,\ x_2 = S_R,\ x_3 = q,\ x_4 = H_e \\
X = H_t, \\
Z_0 = q_0 \\
\overline{\kappa}_1 = \overline{\beta}_1,\ \overline{\kappa}_2 = \overline{\beta}_2,\ \overline{\kappa}_3 = \overline{\beta}_3,\ \overline{\kappa}_4 = \overline{\beta}_4 \\
W_N = \Delta M \cdot \omega = W_{N1} + W_{N2} + W_{N3} + W_{N4} \\
W_{N1} = \left(\int_{M_0}^{M} \frac{\partial M}{\partial \omega} \cdot d\omega\right) \cdot \omega,\quad W_{N2} = \left(\int_{M_0}^{M} \frac{\partial M}{\partial S_R} \cdot dS_R\right) \cdot \omega, \\
W_{N3} = \left(\int_{M_0}^{M} \frac{\partial M}{\partial q} \cdot dq\right) \cdot \omega,\quad W_{N4} = \left(\int_{M_0}^{M} \frac{\partial M}{\partial H_e} \cdot dH_e\right) \cdot \omega \\
\overline{W}_N = \overline{W}_{N1} + \overline{W}_{N2} + \overline{W}_{N3} + \overline{W}_{N4} \\
\overline{W}_{N1} = \overline{\beta}_1 \cdot \Delta\omega \cdot \omega,\ \overline{W}_{N2} = \overline{\beta}_2 \cdot \Delta S_R \cdot \omega,\ \overline{W}_{N3} = \overline{\beta}_3 \cdot \Delta q \cdot \omega,\ \overline{W}_{N4} = \overline{\beta}_4 \cdot \Delta H_e \cdot \omega
\end{array}\right\} \cdots (8)$$

とすればよい。

4. 著者の方法と記述函数法

下表は、著者の方法と記述函数法との要点を対比したものである。

	著者の方法	記述函数法
物理法則の存在	必要である	必要でない
線形化函数形（$\overline{G}_N$）	物理法則から決まる	フーリェ級数の基本波成分から決まる
入力の正弦波変化の仮定	必要である	必要である
出力の正弦波変化の仮定	必要である	必要である
適用範囲	1変数は勿論、多変数の場合にも適用される	1変数の場合のみ適用される

5. リミット・サイクルの安定判別[5)]

リミット・サイクルの安定判別には次のような簡単な方法があるので紹介する。

※7　$\omega = \omega(t)$，$S_R = S_R(t)$，$q = q(t)$ および $H_e = H_e(t)$ であるから

今、

$$\left.\begin{aligned} &\Delta X_s \rightarrow \Delta X_s + \varepsilon \\ &G_i(\Delta X_s, Z_0, \omega_s) = G_i(\Delta X_s + \varepsilon, Z_0, \omega_s + \Delta\omega_s) = 0 \\ &G(j\omega_s) = G_r(\Delta X_s + \varepsilon, Z_0, \omega_s + \Delta\omega_s) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (9)$$

とすると、

(i) $\varepsilon \gtrless 0$ のとき　$G_r \gtrless 0$: 安定

(ii) $\varepsilon \gtrless 0$ のとき　$G_r \lessgtr 0$: 不安定

である。ε : ΔX_s の微小変分

6. あとがき

以上、非線形制御系の解析法の一つとして、著者の方法とその応用について述べたが、著者はディジタル計算機[6]、或いは、現物のサージタンクを使用して実験的にも証明※8したい。

終りに、日頃御指導を戴いている九州大学篠原謹爾教授、中央大学林泰造教授に厚く御礼申し上げます。

〔参考文献〕

1）村瀬：土木学会第22回年次学術講演会講演概要（第Ⅱ部）、昭42.5.

2）M. A. Айзерман : Лекции по теории автоматического регулирования , Москва, 1958.

3）L. Escande : Journal de la Association Internationale de Recherches Hydrauliques Vol. 1 No. 1, 1963.

4）村瀬：土木学会第11回水理講演会講演集、昭42.2.

5）自動制御便覧、コロナ社，昭35.10.

6）村瀬他：昭和42年度電気四学会九州支部連合会大会論文集、昭42.11.

※8 Escande の図式計算結果は一つの証明となつているが[3),4)]