情報理論的水文学の一手法

東京工業大学工学部　日野幹雄

要旨　：一連の情報理論的水文学研究の第一報として，定常確率過程とみなしうる"降雨――流出系"を線型系で近似するとき，流出の予測誤差を最小とするような応答関数（いわゆるunit hydrographを一般化したものをWienerのスペクトルの因数分解法により求め，その一般的な数式表示を与えた。次に，この方法の具体的適用例として利根川支流の神流川での観測資料を用いて計算を行い，二三の検討を行った。

1. 序論

最近の情報理論・自動制御理論の急速な発展は，まさに目をみはるべきものがある。著者は数年前の"河川災害シンポジウム"の席でこの分野の手法を水文学に導入することを提案した。現在の水文学研究は降雨――流出現象を水理学的に解明しようとする方向に向いつつあるが，ここに述べようとする方法（いわゆるblack box system）も新たな立場から検討されて良いと思う。水理学的方法がwhyに対する答からhowの問題に答えようとしているのに対して，情報理論的方法はhowに正しく答えることからwhyに進もうとしているのである。　さて，この論文では，

a)　降雨――流出系は定常確率過程とみなすことができる。

b)　降雨――流出系は線型系ではないとしても，"線型系で近似"しうる。

の2点を仮定する。このうち，b)の仮定はunit hydrographの概念が一般的に受け入れられていることを考えると，ある程度無理のない仮定である。しかし，a)の仮定をすべての降雨現象に及ぼすのには検討の余地があろう。梅雨のような長雨期とか，長年月にわたる降雨――流出現象にはa)の仮定が成り立つと考えられる。上のような仮定のもとでは，予測誤差の二乗平均を最小とする線型近似系をWiener-Kolmogorovの予測理論より求めることができる。すなわち，unit hydrographが合理的に求められるのみならず，予測時間を含む一般化されたunit hydrographが定義される。

2. 流出の最適予測系

上のような仮定のもとでは，時刻 $t=t$ における降雨量を $f_i(t)$ とすれば，時刻 $t+\alpha$ における流出量 $f_o(t+\alpha)$ は，式(1)のような線型系で予測される。

$$f_o(t+\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau,\alpha)\,f_i(t-\tau)\,d\tau \tag{1}$$

ここに，$h(\tau,\alpha)$ は予測時間 α に対する応答関数で，$\alpha=0$ のときは $h(\tau,0)$ はいわゆるunit hydrographである。

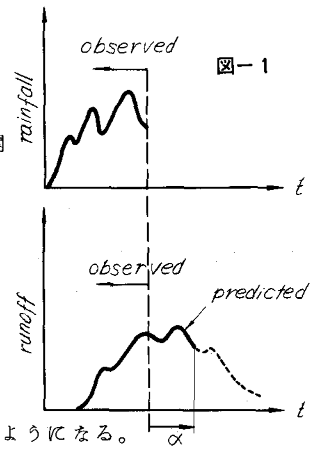
降雨――流出系は，線型系ではないから，式(1)は実際の流出量（desired runoff）$f_d(t+\alpha)$ とは異るであろう。そこで，予測流量 $f_o(t+\alpha)$ と実際に生じる流出量 $f_d(t+\alpha)$ との誤差のr.m.s. $\sqrt{\overline{\varepsilon^2(t)}}$ を最小にするような関数 $h_{OPT}(\tau,\alpha)$ を求める必要がある。

$$\overline{\varepsilon^2(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau,\alpha)\,f_i(t-\tau)\,d\tau-f_d(t+\alpha)\right]^2 dt \tag{2}$$

相関関数 $\varphi_{ii}(\tau)$，$\varphi_{dd}(\tau)$，$\varphi_{id}(\tau)$ を導入して，式(2)を変形すれば〔Wiener (1949), Lee (1960)〕，

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha)\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, \alpha)\, \varphi_{ii}(\tau-\sigma)\, d\sigma$$

$$-2\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, \alpha)\, \varphi_{id}(\tau)\, d\tau + \varphi_{dd}(0). \qquad (3)$$



図－1

となる。ここに，降雨，流出量の自己相関関数およびそれらの相互相関関数は次式で定義される。

$$\varphi_{ii}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_i(t)\, f_i(t+\tau)\, dt, \qquad (4)$$

$$\varphi_{dd}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_d(t)\, f_d(t+\tau)\, dt, \qquad (5)$$

$$\varphi_{id}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_i(t)\, f_d(t+\tau)\, dt. \qquad (6)$$

式(3)の $\overline{\varepsilon^2(t)}$ を最小にするための必要十分条件は，変分原理から次のようになる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma, \alpha)\, \varphi_{ii}(\tau-\sigma)\, d\sigma - \varphi_{id}(\tau) = 0. \qquad (\tau \geq 0) \qquad (7)$$

式(7)は $\tau \geq 0$ の場合にのみ成立すれば良いことは重要な点で，この型の積分方程式は **Wiener－Hopf equation** と呼ばれている。また，$f_{do}(t)$ を $f_i(t)$ と同一時刻の流出量，φ_{ido} を f_i と f_{do} の相互相関とすれば

$$\varphi_{id}(\tau) = \overline{f_i(t)\, f_d(t+\tau)} = \overline{f_i(t)\, f_{do}(t+\alpha+\tau)} = \varphi_{ido}(\tau+\alpha) \qquad (8)$$

である。したがって，Wiener－Hopf eq. は次のようになる。

$$\varphi_{ido}(\tau+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{OPT}(\sigma, \alpha)\, \varphi_{ii}(\tau-\sigma)\, d\sigma \qquad (\tau \geq 0) \qquad (9)$$

なお，予測のための観測時間を有限と考えれば (Zadeh & Ragazzini (1950), Davis (1952)), 次のようになる。

$$\varphi_{ido}(\tau+\alpha) = \int_{0}^{T} h_{OPT}(\sigma, \alpha)\, \varphi_{ii}(\tau-\sigma)\, d\sigma. \qquad (0 \leq \tau \leq T) \qquad (10)$$

式(10)より h_{OPT} を解くのには，ⓐスペクトル因数分解による方法，ⓑ固有関数による展開法，ⓒ直接的な方法，ⓓ数値解など種々の方法がある。式(10)を差分式化すれば，

$$[\Phi_{id}] = [\Phi_{ii}]\, [H] \qquad (11)$$

と表わされる。ここに，$[\Phi_{id}]$ などは次式によって定義される matrix である。

$$[\Phi_{ii}] = \begin{bmatrix} \varphi_{ii}(0) & \varphi_{ii}(-1) & \varphi_{ii}(-2) & \cdots & \varphi_{ii}(-m) \\ \varphi_{ii}(1) & \varphi_{ii}(0) & \varphi_{ii}(-1) & \cdots & \varphi_{ii}(1-m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{ii}(m) & \varphi_{ii}(m-1) & \varphi_{ii}(m-2) & \cdots & \varphi_{ii}(0) \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(m) \end{bmatrix}, \quad [\Phi_{id}] = \begin{bmatrix} \varphi_{id}(0) \\ \varphi_{id}(1) \\ \varphi_{id}(2) \\ \vdots \\ \varphi_{id}(m) \end{bmatrix} \qquad (12)$$

したがって，h_{OPT} は $[\Phi_{ii}]$ の inverse を求めることにより簡単に解くことができる。

$$[H] = [\Phi_{ii}]^{-1}\, [\Phi_{id}] \qquad (13)$$

こうした数値解は，実際問題を解く場合にはさしつかえがないとしても，個々のケース毎に逆 matrix を求めなければならず，同種の問題の解答もすぐには得られないという欠点があるし，現象の一般的特性

も見失うことになってしまう。

Wiener－Hopf eq.の解析解はスペクトルの因数分解法 (Wiener (1949))を応用する場合は，次のようにfrequency domainにおける形で与えられる。

$$H_{OPT}(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2\pi\, \Phi_{ii}^{+}(\lambda)} \int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}\, d\tau \int_{0}^{\infty} \frac{\Phi_{id}(\omega)}{\Phi_{ii}^{-}(\omega)} e^{i\omega\tau}\, d\omega \tag{14}$$

ここに，H_{OPT}，Φ_{ii}，Φ_{id}はそれぞれh_{OPT}，φ_{ii}，φ_{id}のFourier変換である。また，Φ_{ii}^{+}はΦ_{ii}を因数分解したさいに複素平面λの上半面にのみzeroおよびpoleを有する因子，Φ_{ii}^{-}は逆に下半面にのみzeroおよびpoleを有する因子である。

$$\Phi_{ii}(\lambda) = \Phi_{ii}^{+}(\lambda)\, \Phi_{ii}^{-}(\lambda) \tag{15}$$

式(8)の関係を用いれば，式(14)は

$$\left.\begin{aligned} H_{OPT}(\lambda, \alpha) &= \frac{e^{i\alpha\lambda}}{2\pi\, \Phi_{ii}^{+}(\lambda)} \int_{\alpha}^{\infty} \psi(\tau)\, e^{-i\lambda\tau}\, d\tau \\ \psi(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{ido}(\omega)}{\Phi_{ii}^{-}(\omega)}\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

となる。したがって，最適予測関数$h_{OPT}(\tau, \alpha)$は次のようになる。

$$h_{OPT}(\tau, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\tau+\alpha)\lambda}}{\Phi_{ii}^{+}(\lambda)} \int_{\alpha}^{\infty} \psi(\tau)\, e^{-i\lambda\tau}\, d\tau\, d\lambda. \tag{17}$$

3. 降雨・流出の相関およびスペクトル

予測理論において相関関数を直交関数系を作るLaguerre function $l_n(\tau)$を用いて級数展開することがあるが，降雨――流出現象では簡単な数個の関数の和で表わされるのが普通である。降雨の自己相関関数は多くの不規則現象や乱流がそうであるようにexponentialで表わされる(ただし，予測のスケールは数時間ないし数日と考えており，一年を周期とする長周期の変動は除く)。

$$\varphi_{ii}(\tau) = a e^{-p|\tau|} \tag{18}$$

したがって，降雨のスペクトルおよびその因子は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{ii}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \varphi_{ii}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = ap/\pi(p^2+\omega^2) \\ \Phi_{ii}^{+}(\omega) &= \sqrt{\frac{ap}{\pi}}\, \frac{1}{(p+i\omega)}, \qquad \Phi_{ii}^{-}(\omega) = \sqrt{\frac{ap}{\pi}}\, \frac{1}{(p-i\omega)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

一方，相互相関$\varphi_{ido}(\tau)$は$e^{-a\tau}$および$\tau^{n} e^{-b\tau}$の形の関数の和として

$$\varphi_{ido}(\tau) = \sum_{k=0}^{k} \varphi_{ido}^{(k)}(\tau) \tag{20}$$

$$\varphi_{ido}^{(k)}(\tau) \begin{cases} = \varphi_{ido1}^{(k)}(\tau) = A_{1k}(\beta-\tau)^{n_{1k}}\, exp\,\{a_{1k}(\tau-\beta)\} & (\tau < \beta) \\ = \varphi_{ido2}^{(k)}(\tau) = A_{2k}(\tau-\beta)^{n_{2k}}\, exp\,\{-a_{2k}(\tau-\beta)\} & (\tau \geqq \beta) \end{cases} \tag{21}$$

とすれば十分である。したがって，流出のスペクトルは

$$\Phi_{ido}(\omega) = \sum_{k=0}^{k} \Phi_{ido}^{(k)}(\omega)$$

ここに，$\Phi_{ido}^{(k)}(\omega) = A_{1k}\, \dfrac{(-1)^{n_{1k}+1}(n_{1k}!)\, e^{-i\beta\omega}}{2\pi\,(a_{1k}-i\omega)^{n_{1k}+1}} + A_{2k}\, \dfrac{(n_{2k}!)\, e^{-i\beta\omega}}{2\pi\,(a_{2k}+i\omega)^{n_{2k}+1}}$ (22)

式(22)から明らかなように，cross-spectrumは一般に複素関数であり，その実数部をcross-spectrum $(C(\omega))$，虚数部をquadrature-spectrum $(Q(\omega))$と名付ける。これより，coherence $C_h(\omega)$ と phase $\theta(\omega)$

$$C_h(\omega) = \frac{C^2(\omega) + Q^2(\omega)}{\Phi_{ii}(\omega)\ \Phi_{id}(\omega)}, \qquad \theta(\omega) = tan^{-1}\frac{C(\omega)}{Q(\omega)} \tag{23}$$

が定義される。

4. 流出の最適予測関数

最適予測関数は，特別な場合には式(10)から直接に，一般の場合には式(16)より次のように求まる。

a) 降雨——流出系が線型系である場合： この場合には，式(10)において $(\tau \geqq 0)$ という条件がなくなるから，この式の Fourier 変換から

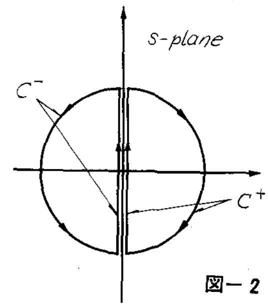
$$H(\lambda) = \Phi_{id}(\lambda)/\Phi_{ii}(\lambda) = e^{i\alpha\lambda}\ \Phi_{ido}(\lambda)/\Phi_{ii}(\lambda) \tag{24}$$

b) 降雨の自己相関関数が δ —関数とみなせる場合： この場合は

$$\varphi_{ii}(\tau) = K\,\delta(\tau) \tag{25}$$

として，やはり式(10)から直ちに

$$h_{OPT}(t, \alpha) = \varphi_{id}(t)/K = \varphi_{ido}(t + \alpha)/K \tag{26}$$



図−2

となる。すなわち，最適予測関数 h_{OPT} は降雨——流出の相互相関関数を時間 α だけずらし，降雨強度 K で割ったものである。

c) 一般の場合： 式(16)の積分は留数定理により次のようになる。

$$\psi(\tau) \begin{cases} = \sqrt{\dfrac{\pi}{ap}}\,\Sigma Res\,[\mathrm{I} + \mathrm{II}]_{r.h.p.} = \sqrt{\dfrac{\pi}{ap}}\sum_{k=0}^{k}(-1)^{n_{1k}} A_{1k}(p - a_{1k})(\tau - \beta)^{n_{1k}}\ exp\{a_{1k}(\tau - \beta)\} \\ \qquad = \mathrm{I}(\tau) \qquad (\tau < \beta) \\ = \sqrt{\dfrac{\pi}{ap}}\,\Sigma Res\,[\mathrm{I} + \mathrm{II}]_{l.h.p.} = \sqrt{\dfrac{\pi}{ap}}\sum_{k=0}^{k} A_{2k}(p + a_{2k})(\tau - \beta)^{n_{2k}}\ exp\{-a_{2k}(\tau - \beta)\} \\ \qquad = \mathrm{II}(\tau) \qquad (\tau \geqq \beta) \end{cases} \tag{27}$$

ここに，$s = i\omega$ として，

$$\mathrm{I} = A_{1k}\,\frac{(-1)^{n_{1k}+1}(n_{1k}\,!)\,(p - s)}{(a_{1k} - s)^{n_{1k}+1}}\cdot e^{(\tau-\beta)s}, \qquad \mathrm{II} = A_{2k}\,\frac{(n_{2k}\,!)\,(p - s)}{(a_{2k} + s)^{n_{2k}+1}}\cdot e^{(\tau-\beta)s} \tag{28}$$

であり，また，$l.h.p.$ は $\tau \geqq \beta$ の場合には複素平面 s の左半平面の積分路 C^- に対する Residue の意味であり，$r.h.p.$ は $\tau < \beta$ の場合に複素平面 s の右半分での Residue の意味である（図−2）。

以下，式(16)の積分を順次行なって，その Fourier 変換として $h_{OPT}(t, \alpha)$ は，$(\alpha > \beta)$ の場合には

$$h_{OPT}(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{k}\frac{A_{2k}\,e^{-a_{2k}(\alpha-\beta)}}{4\pi\,api}\int_{-i\infty}^{i\infty}(p+s)(p+a_{2k})\,e^{ts}\sum_{r=0}^{n_{2k}}\frac{(n_{2k}\,!)\,(\alpha-\beta)^{n_{2k}-r}}{(n_{2k}-r)\,!\,(a_{2k}+s)^{r+1}}\,ds$$

$$\begin{cases} = \dfrac{(-1)}{2ap}\displaystyle\sum_{k=0}^{k} Res[\qquad\qquad]_{r.h.p.} \qquad (t < 0) \\ = \dfrac{1}{2ap}\displaystyle\sum_{k=0}^{k} Res[\qquad\qquad]_{l.h.p.} \qquad (t \geqq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} = 0 \\ = \dfrac{1}{2ap}\displaystyle\sum_{k} A_{2k}(p^2 - a_{2k}^2)\,e^{-a_{2k}(t+\alpha-\beta)}\sum_{r=0}^{n_{2k}}\{(n_{2k}\,!)(\alpha-\beta)^{n_{2k}-r}t^r\}/\{(n_{2k}-r)\,!\,(r\,!)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} = 0 & (t < 0) \\ = \dfrac{1}{2ap}\displaystyle\sum_{k=0}^{k}(p^2 - a_{2k}^2)\ \varphi_{id2}^{(k)}(t+\alpha) & (t \geq 0) \end{cases} \qquad (29)$$

$(\alpha<\beta)$ の場合にも $(0<t<\beta-\alpha)$ について新たに一式が出るが，ほぼ式(29)のような関係となる。

ところで，次式により“降雨規模” K を定義しよう。

$$K = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{ii}(\tau)\,d\tau = 2a/p \qquad (30)$$

この降雨規模 K は，降雨の強さと降雨の継続時間の積に相当する量であり，乱流理論における乱れの強さと平均渦径の積に対応している。

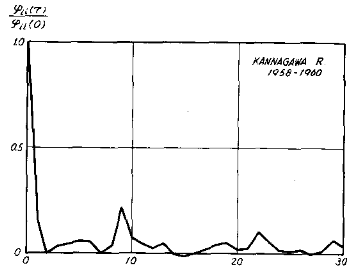
結局，$h_{OPT}(t,\alpha)$ は次のように簡単な形にまとめられる。

$$h_{OPT}(t,\alpha)\begin{cases} = 0 & (t<0) \\ = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=0}^{k}\left(1-\frac{a_{1k}^2}{p^2}\right)\varphi_{ido1}^{(k)}(t+\alpha) & (0\leq t<\beta-\alpha) \\ = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=0}^{k}\left(1-\frac{a_{2k}^2}{p^2}\right)\varphi_{ido2}^{(k)}(t+\alpha) & \left(\begin{matrix}0<\beta-\alpha\leq t \\ \beta-\alpha<0\leq t\end{matrix}\right) \end{cases} \qquad (31)$$

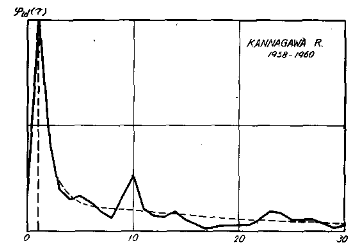
すなわち，最適予測関数(一般化されたunit hydrograph)は降雨――流出の相互相関関数を構成する各関数要素を加重して加えたものであり，その加重率は短期流出に対して軽く，長期流出に対して重いという性質をもっている。

5. 神流川への適用例　以上述べて来た理論を利根川の一支流である神流川に適用してみる。この流域については建設省土木研究所により昭和26年～35年にわたって詳しい降雨・流出量の資料が集められている。このうち昭和33・34年には大洪水があり，そのため降雨――流出の非線型性が強いと思われるが，むしろ適用限界の検討と云う意味からこの二年に35年を加えた3年間の資料について予測理論の結果を適用してみる。

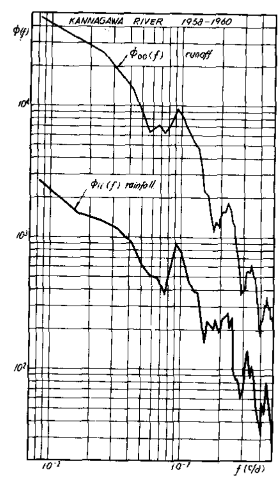
図－3，4はそれぞれ降雨の自己相関と降雨・流量の相互相関であり，図－5は降雨・流量のスペクトルを示す。図－3，4より式(18)・(21)の諸係数を求め，式(31)により $\alpha=0$ に対する最適予測関数(unit hydrograph) $h_{OPT}(t)$ を求めれば図－6のようになる。なお，同図には式(13)



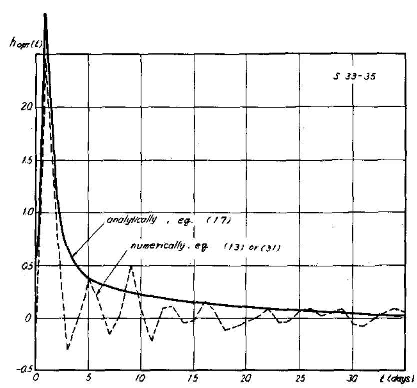
図－3



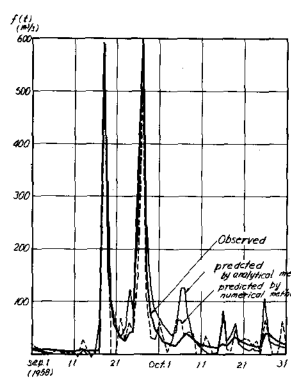
図－4



図－5



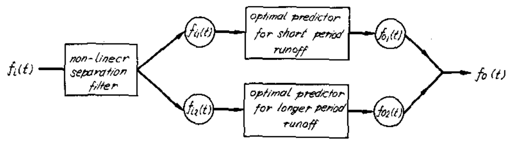
図－6



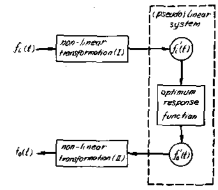
図－7

により数値的に求められた$h_{OPT}(t)$も示されている。

この$h_{OPT}(t)$を用いて式(1)により求められた予測流出量と実測流出量との比較は図－7のようになる。



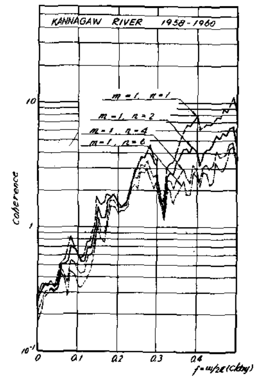
図－8



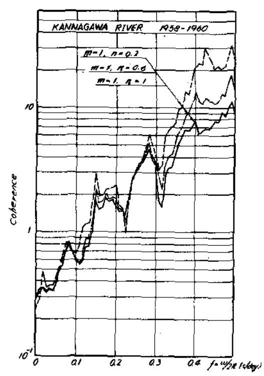
図－9

6. 非線型変換による予測性の向上

降雨――流出のような非線型性を多分にもつ系については，さらにすすんでWiener (1958) の非線型系の予測理論を応用するのが良いであろう。しかし，これは問題を一段と複雑にするから，多少の技巧により4節の理論の予測性の向上が得られれば，これに越したことはない。その手法としては，降雨を非線型フィルターで長期流出と短期流出に関係する成分に分ける方法，降雨・流出にそれぞれ非線型変換をほどこして，準線型系になるようにして線型予測理論を適用する方法などが考えられる（図－8，9）。



図－10A



図－10B

さてもし，ある応答系が線型系であるとすれば，よく知られているように，

$$\Phi_{oo}(\omega) = |H(\omega)|^2 \quad \Phi_{ii}(\omega) \tag{32}$$

$$\Phi_{io}(\omega) = H(\omega) \quad \Phi_{ii}(\omega) \tag{33}$$

の関係がある。式(32)／式(33)より$H^*(\omega) = \Phi_{oo}(\omega)/\Phi_{io}(\omega)$，また式(33)のconjuateから$H^*(\omega) = \Phi_{io}^*(\omega)/\Phi_{ii}(\omega)$である。それゆえ，coherenceは

$$\text{coherence} = |\Phi_{io}|^2/\Phi_{ii}\cdot\Phi_{oo} = 1 \tag{34}$$

の関係が成立しなければならない。今，最も簡単な非線型変換として

$$f_i'(t) = [f_i(t)]^m, \quad f_o'(t) = [f_o(t)]^n \tag{35}$$

を考える。図－10に示すように，生の$f_i \cdot f_o$のcoherenceは1より離れており，この流出系は線型性が弱いことが明らかであるが，$m \cdot n$を変えることにより低周波数成分の線型性をあまりくずすことなく，高周波成分（ピーク流出）の線型性をかなり向上しうる。また，図－10から図－8に示すように低周波数成分と高周波数成分に分離する方が望ましいことも見取ることができる。

1) 日野 幹雄（1967）： 第4回災害科学総合シンポジウム論文集
2) 日野 幹雄（1967）： 東京工業大学土木工学科研究報告第4号
3) 石原藤次郎・高棹 琢馬・池渕 周一（1967）：土木学会第22回年次学術講演会
4) Lee, Y.E. (1960) : Statistical Theory of Communication
5) 菅原 正己（1965）：水資源の変動様相に関する調査第6報
6) Wiener, N. (1949) : Extraporation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series.
7) Wiener, N. (1958) : Nonlinear Problems in Random Theory.