

Kármán 定数に関する2,3の考察

東京工業大学工学部 福岡 捷二

要 旨

開水路における清水の Kármán 定数は、流れが二次元的であれば、円管と同様にほぼ $\kappa = 0.4$ を満足するが水路の断面形状や水路特性に関係する流れの三次元性や、自由表面の存在による流れの不安定の度合が大きくなるにつれて、Kármán 定数がかなり減少することを知った。

さらに浮遊砂の連続式に、水面附近の濃度を考慮して土砂流の Kármán 定数を求める式を導き、この式が広い粒径範囲にわたって実験結果を満足することを示した。

1. 概 説

Prandtl によって運動量輸送から導かれた円管の速度分布は、壁面のごく近い領域内で混合距離が一定という仮定をして導かれたもので、混合距離が速度分布のみの関数で shear stress が境界で一定であると仮定した Kármán の相似理論からも導くことができる。円管流での Nikuradse の実験から決定された2つの定数を用いると、この速度分布が円管中心部まで十分適用できることが確かめられた。すなわち対数速度分布式は rough bed に対して

$$\frac{U}{U_*} = A_r + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} \quad (1)$$

$$\frac{U_m}{U_*} = A_r - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{k_s} \quad (2)$$

二次元円管流に対して導かれたこの速度分布式が、その後開水路水流に対しても注目されるようになり、Ó'Brien¹⁾ や Keulegan²⁾ によって(1)式で表わされる対数速度分布が、円管流の実験定数を用いて開水路水流に対しても適用できることが確かめられた。

しかし(1)式を、開水路水流に適用するには、円管と異なって、自由表面の存在、流れが三次元的であるなどから Kármán 定数 κ 、積分定数 A など検討すべき点が多い。これらの点に関して Keulegan, Powell³⁾ は自由表面の影響、断面形の影響を考慮して(2)式を補正しているが、現象を確実にとらえるまでには至っていない。又岩垣⁴⁾も自由表面が混合距離を変化させると仮定して積分定数 A がフルード数 F によって変化することを示した。

しかし、これらの研究では、 κ の値は円管の場合と同様に 0.4 であると仮定した。

Kármán 定数のもつ物理的な意味は、混合距離 ($= \kappa y$) が気体分子運動論の平均自由行程に比較して物理的な根拠に乏しいため単に乱れの一尺度と考えられているにすぎない。 κ がすべての条件にわたって一定であれば問題はないが、もし定数でないとすれば(2)式から明らかなように抵抗係数を変化させ問題を複雑にする。

土砂流の Kármán 定数に関する研究は数多いが、開水路における清水の Kármán 定数については管路の実験から得られた $\kappa \doteq 0.4$ が一般的に受け入れられ今日に至っている。

しかし開水路における清水の Kármán 定数が変化することを指摘した研究もかなりある。すなわち E.H. Taylor⁵⁾ は Basin の実験データから Kármán 定数は断面形状によって 0.22 ~ 0.43 の値をとり得ることを指摘した。著者ら⁶⁾ もすでに Kármán 定数が F_r 数とともに変化することを示した。Jegorow⁷⁾ は矩形滑面水路で、本間は粗面水路での実験から等しいレイノルズ数に対する抵抗係数は、常流では F_r 数にほとんど無関係であるが、射流では F_r 数の影響があることを示した。

この様に、開水路清水の Kármán 定数の変化が起り得るとすれば、その原因として次の 2 つが考えられる。

① 流速分布の関数形が変化する。すなわち流速分布が対数分布則に従がわない。

② 流水の乱流混合機構が変化する。

① は本質的な問題ではあるが、速度分布として対数分布を首肯すれば、Kármán 定数の変化は②の乱流混合機構の変化に起因すると考えられる。

本研究は、開水路における清水の Kármán 定数について若干考察し、さらに土砂流の Kármán 定数についても興味ある結果を得た。

2. 実験結果と考察

実験に用いた水路は 2 種類である。

第一は、東京工業大学の長さ 8 m、巾 0.4 m の鋼製環流式可変勾配水路であり（水路Ⅰ）、第 2 は東京大学の長さ 12 m、巾 0.3 m の木製ラワン材水路である（水路Ⅱ）。流速分布はピトー管と傾斜マノメーターを用いて測定しそれから Kármán 定数を求めた。

使用した砂は 3 種類で平均粒径 $d_m = 0.0015\text{ cm}$ 、 0.005 cm の珪砂と $d_m = 0.015\text{ cm}$ の豊浦産標準砂である。
比重はいずれも 2.65 である。¹¹⁾

2.1 清水の Kármán 定数と F_r の関係

図-1 は、水路Ⅰ、Ⅱにおいて、水路底が滑面の場合、流速分布から求めた清水の Kármán 定数と F_r の関係を示す。Kármán 定数は F_r 数とともに減少し、 $F_r = 1.0 \sim 1.3$ 附近で極小となり、その後 F_r 数の増加とともに、次第に κ は増加している。

図-2 は Powell³⁾ の滑面水路（水路底はアル

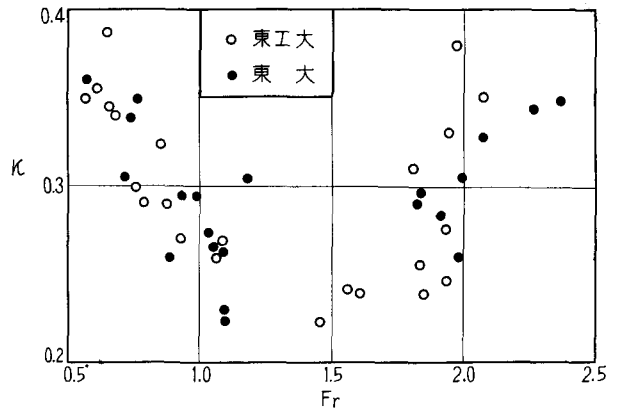


図-1 Kármán 定数とフルード数の関係
(滑面水路)

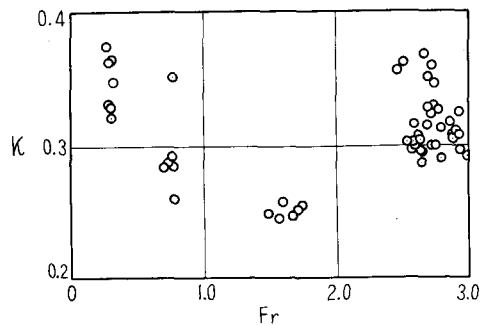


図-2 Kármán 定数と F_r 数の関係
(Powell's data)

ミニウムを塗布した長さ15m,巾20cmの鋼製水路)での実験結果をKármán定数と F_r の関係に再プロットしたものである。

PowellのデータにはKármán定数は明示されていないが、水路底が滑面であるのですべての水理条件にわたって相当粗度 k_s はほぼ一定である⁶⁾。

したがって $k_s=0.03\text{ cm}$ を用いて(2)式から κ を計算することができる*。

このようにして求めたPowellの実験結果についても、著者の実験結果とほぼ同様なことがいえそうである。

このことは、開水路流でも、清水のKármán定数はすべての水理条件にわたってほぼ0.4であるという一般的に認められていた事実と反する。

さらに、自然に水面に発生している擾乱が大きければ、同一の水理条件でもできるだけ水面変動を消した場合と比較してKármán定数の減少は大きい。

しかし、水路上流端で造波した場合にKármán定数には影響しない。

このことは、水面に自然的に発生している波がKármán定数と密接な関係をもっていることを暗示している。

図-3は、滑面水路における、特定な横断面での速度分布の一例で、各断面ごとに速度分布が異なり、きわめて三次元性が強い。図-4は底面および水路側壁片側中央4m区間に粒径1.5mmの均一粒径砂をはりつけた場合の流速分布の一例である。

水路底が滑面の場合と比較して、粗度をつけた側壁近くを除いては、横断方向に速度分布がほとんど一様で、かなり二次元的な流れとなっている。

この場合のKármán定数と F_r の関係は、図-5にみられるように、滑面の場合と同じ傾向をもつ

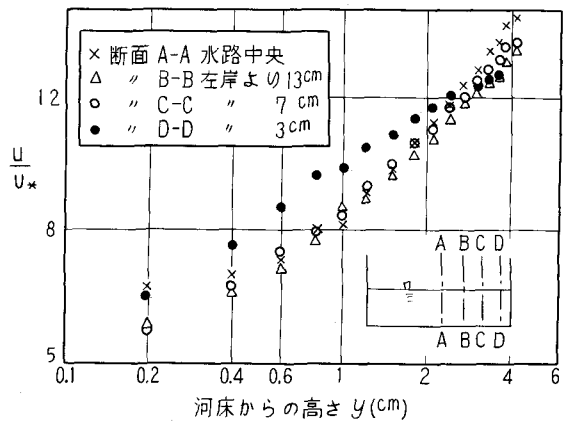


図-3 速度分布 (滑面水路)

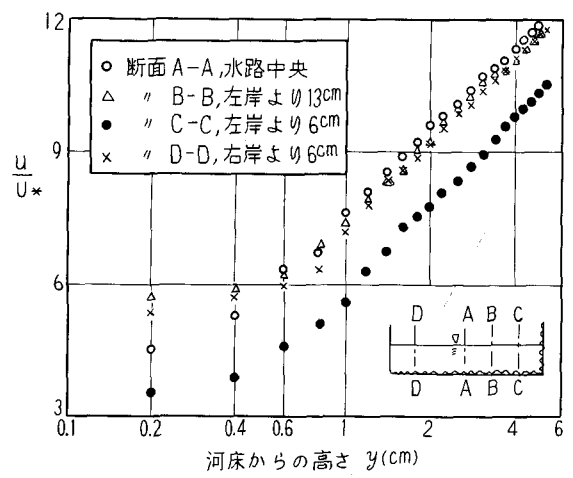


図-4. 速度分布の一例
(水路底と左岸に一樣粗度)

* $k_s=0.03\text{ cm}$ は、著者の用いた水路から推定した値で、ほぼ妥当と思われる。しかし k_s がこれより大きくても、小さくても、 κ と F_r の関係はほとんど変わらず、 κ の値がやや変化するにすぎない。しかし積分定数 A の値を一定として計算したところに問題が含まれている。

が F_r による Kármán 定数の変化は小さい。

特に、フルード数が小さい場合には、水面がほとんど変動せず、しかも流れは二次元に近いので円管の κ と同様にほぼ 0.4 を示す。

しかし、いずれも Kármán 定数が F_r 数 1.0 ~ 1.3 の範囲で極小を示し、その前後でしだいに κ が大きくなるのは、自由表面の存在による流れの不安定性のためと考えられる。すなわち、水面の波を観察すると、定常的なうろこ状の波が無数に発生している。これは、主として水面の不安定性に起因した擾乱で、一種の跳水のようなものと考えられる。

流れの不安定性が最大となり、水面の擾乱が最も大きくなるのは、 F_r 数が 1 附近であり、そのため Kármán 定数が極小を示すと考えられる。

これらの結果から、清水の Kármán 定数は、円管では流れが二次元であり、しかも自由表面をもたないためにすべての水理条件にわたって $\kappa \div 0.4$ であるが、開水路では、流れの三次元性および自由表面の影響で、かなり変化することが明らかになった。

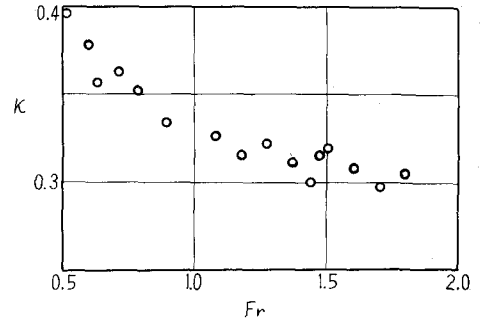


図-5 Kármán 定数とフルード数の関係 (rough bed)

2.2 土砂流の Kármán 定数

土砂流の Kármán 定数については、志村⁹⁾、日野¹⁰⁾ のすぐれた理論研究がある。

さて浮遊砂が微細砂であれば或いは浮遊砂が混合砂で、その中に微細砂がかなりの量含まれている場合には、河床附近から水面附近まで濃度分布がかなり一様化し、そのため浮遊砂拡散に費されるエネルギーは減少するはずである。両氏の用いたエネルギー平衡式は、土砂を含んだ流れを十分満足するものであるが、連続式から得られた濃度分布が Rouse 分布で水面附近の濃度が零という境界条件を用いているために、微細砂が含有されている場合には、濃度勾配のみつもりが大きすぎ、その結果 Kármán 定数が小さめにみつめられる傾向がある。

すでに、吉川、福岡¹¹⁾、これらの点を考慮した濃度分布式として(3)式を求め、一様粒径砂、広い粒径範囲をもつ混合砂を問わず、定量的に実測濃度分布とよく一致することを示した。

$$C_y = \left(\frac{h-y}{y} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^z \cdot C_a + \frac{D}{w_o} \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^z - 1 \right\}$$

$$\frac{D}{w_o} = \frac{C_b - \left(\frac{h-b}{b} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^z \cdot C_a}{\left\{ \left(\frac{h-b}{b} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^z - 1 \right\}} \quad (3)$$

$$z = \frac{w_o}{\kappa U_*}$$

ここに C_y, C_a, C_b : 河床からそれぞれ y, a, b の高さの点の濃度 (Volume ratio),
 h : 水深, y : 河床からの任意点の高さ, U_* : shear velocity,
 w_o : 粒子の沈降速度, D : 積分定数

濃度分布式として(3)式を用いれば、志村、日野の両氏とも(4)式であらわされる。^{**}
 ただし、混合砂の場合、すべての粒径について質量輸送係数が等しいと仮定している。

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_o} + \frac{B(r-1)g(h-\delta)\Sigma C_r w_r}{U_*^3(l_n \frac{h}{\delta} - 1)} + \frac{B(r-1)g(h-\delta) \cdot D}{U_*^3(l_n \frac{h}{\delta} - 1)} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\kappa_o} + B(S+P)$$

ここに C_r, w_r : それぞれ粒径 r の粒子の濃度と沈降速度
 κ_o : 清水の Kármán 定数 B : 比例定数

$$\delta = \frac{11.6 \nu}{U_*}$$

積分定数 D は、速度の次元を持っており、(3)式から明らかなように、水面附近と河床附近の2点の濃度から決定される。しかし、この値は本来、流水の乱れ特性および浮遊砂特性から決定されるべきものであろう。

ここで注目すべきことは、積分定数 D が常に負の値をもつので、微細砂の浮遊量が増加しても κ の減少には、それほど大きくは影響しないということである。

しかしながら、浮遊砂の粒径が 0.1 mm 以上であれば、粒子の沈降速度が大きいために水面附近の濃度が零、あるいは無視し得るほど小さくなる。¹⁾

したがってこの場合には $D=0$ とみなしてもよく、これらの粒子の浮遊濃度の増加とともに著しく Kármán 定数は減少する。

これらのことから、微細粒子が流速分布におよぼす作用は、それより粗い粒子に比較してやや消極的であるといえる。

さて(4)式の定数 B は実験から決定されるものである。水略底に堆積が起らなければ、清水も土砂流も、水利条件は同一であるので¹¹⁾

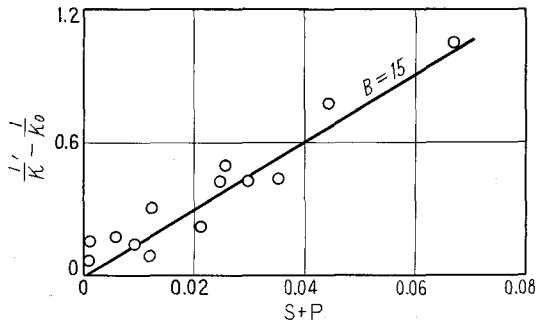


図-6 比例定数 B の決定

^{**} 日野の式は、濃度分布式として(3)式を用いれば

$$\frac{\kappa_o}{\kappa} = \frac{(1+\beta C_a)}{2} [1 + \{1+4B\kappa_o(1+\beta C_a)(S+P)\}^{\frac{1}{2}}]$$

$\beta C_a \ll 1$ であるから ($\beta=2$) Taylor 展開し微小項を無視すると(4)式が得られる。

F_r による Kármán 定数の変化はほとんど差がない。

したがって土砂流の κ から清水の κ を差し引けば Kármán 定数に關係するものは濃度のみであると予想される。

図-6 は $(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_0})$ と $(S+P)$ の關係であり、多少のバラツキはあるが、勾配から $B=1.5$ である。

このように、水面附近の濃度の影響を考慮した(4)式から求めた Kármán 定数と速度分布から求めた Kármán 定数の比較が図-7 である。

両者の対応は、一様粒径砂、混合砂を問わずかなりよいといえる。

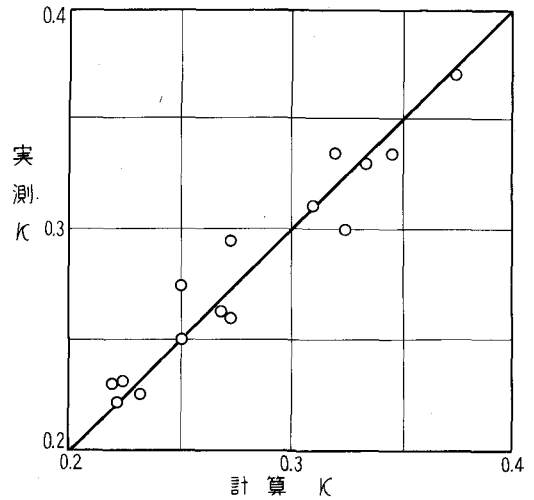


図-7 実測Kと計算Kの比較

3. 結 語

開水路水流における、清水の Kármán 定数が、流れの三次元性や自由表面の影響を受け、かなり変化するので、対数式の適用にあたっては注意が必要であろう。

最後に、この研究を行なうにあたり、終始御指導を賜った、本学吉川秀夫教授に感謝の意を表するとともに、実験に際しては土木工学科学生島田徹君の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) M.P. O'Brien : Trans. A.G.U. 1937
- 2) G.H. Keulegan : Jour. of Research of the N.B.S. vol. 21, No. 6, 1938
- 3) R.W. Powell : Trans. A.S.C.E. vol. 111, 1946, Trans. A.G.U. vol. 30, No. 6, 1949, Trans. A.G.U. vol. 31, No. 5, 1950
- 4) Yuichi Iwagaki : Proc. 2nd Japan National Congress for App. Mech. 1952
Proc. 4th Japan National Congress for App. Mech. 1954
- 5) E.H. Taylor : Trans. A.G.U. 1939
- 6) 吉川秀夫, 椎貝博美, 福岡捷二 : 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 2, 1967
- 7) Von S.A. Jegorow : Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Heft 3, 1940
- 8) Masashi Homma : Proc. 2nd Japan National Congress for App. Mech. 1952
- 9) 志村博康 : 土木学会論文集, 第46号, 1957
- 10) 日野幹雄 : 土木学会論文集, 第92号, 1963
- 11) Hideo Kikkawa, Shoji Fukuoka : Hydraulic rolls of wash load,
土木学会論文集投稿中