

砂漣のスペクトル(理論と実験との比較)

東京工業大学工学部 日野 幹雄

要 旨：さきに Dimensional consideration により導いた砂漣スペクトルの平衡領域の関数形を二三の実験結果と比較し、平衡領域スペクトルについての“ -3 乗則”が広い波数範囲にわたり成立していることを明らかにした。

1. 砂漣の平衡領域スペクトルの理論

砂漣の形成の mechanism は Cartwright や Kennedy により境界面の不安定現象として説明されるようになった。一方、最近では砂漣のスペクトルが実験的に求められ、このスペクトルの関数型を砂漣の形成をマルコフ過程として導こうとする試みが行なわれている。こゝでは、この問題を力学機構的に取扱ってみる。

ところで、不規則変動量のスペクトルにはそれを形成する因子の一つが主力を演じ、スペクトルの関数型が決定される平衡領域が存在する場合がある。それは、theory of similarity とか equilibrium subrange と呼ばれる。乱流理論における Kolmogorov の“ $-5/3$ 乗則”は運動方程式の慣性項がエネルギー輸送の主役を演ずる領域について、また風波スペクトルにおける Phillips の“ -5 乗則”は重力の加速度と水粒子の運動の加速度とが平衡する領域について成立する。大気乱流や潮流では $-5/3$ 乗則の成立する慣性領域が極めて幅広いことがよく知られており、風波スペクトルの場合でも -5 乗則はエネルギー・ピーク近くまでの広い範囲にわたって成り立っている。

砂漣スペクトルの場合にも、このような平衡領域についてスペクトルの関数型を導くことができる。たゞ、砂漣の場合にはある時刻の流路底断面の変位についての波数スペクトルと1点での底面変位に関する周波数スペクトルでは取り扱い方が異なることに注意しなければならない。前者では砂の angle of repose が、後者では shear velocity がスペクトルの関数型を支配し、すでに発表したように次のようになる(日野(1967))。

a) 波数スペクトル

$$S_{\eta}(k) = \alpha f_n(\varphi) k^{-3} \quad (k_0 < k \ll d^{-1}) \quad (1)$$

b) 周波数スペクトル

$$S_{\eta}(\omega) = \beta U_*^2 \omega^{-3} \quad (\omega_0 < \omega) \quad (2)$$

$$S_{\eta}(\omega) = \omega r f_n(\varphi) \omega^{-2} \quad (\omega < \omega_0) \quad (3)$$

こゝに、 α, β は無次元の universal constant, r は $[L^2/T]$ の次元をもつ constant, φ は砂の angle of repose, U_* は shear velocity, d は砂の粒径, k_0 はスペクトル・ピークの波数。大体的様子は図-1に示すとおりである。

また、砂漣の移動速度は平衡領域では

$$C(k) = \beta' U_* \quad (k_0 < k \ll d^{-1}) \quad (4)$$

であるが($\beta' = [\beta / \alpha f_n(\varphi)]^{1/2}$), 波数が小さくなると第一次近似として

$$C(k) = \frac{r}{2} k \quad (5)$$

となる。

2. 実験との比較

以上の式(1)～(3)までの砂漣の平衡領域スペクトルを実験と比較すれば、図-2～8のようになる。実験は図-8の Rio Grande conveyance channel の結果以外はすべて実験水路でのものである。また、図-5は水路の上流で強制的に水面に波を起こした場合のものである。その他の条件は表-1のようになっている。

このようになり種々の条件のもとでも理論的に予測される平衡領域の周波数スペクトルおよび波数スペクトルの“ -3 乗則”が広い範囲にわたって成り立っているのを認めることができる。周波数スペクトルの“ -2 乗則”も同じく成立していると云ってよいであろう。

このような実験結果から、比例係数 $\alpha f_n(\varphi)$ を求めてみると表-1のようである。福岡の実験と Nordin & Algert の実験は大体同じ比例係数であるが、芦田・田中の実験からはちょうど一桁大きい値となる。

少なくとも福岡と Nordin & Algert の実験値のバラツキは、水路長の制約上あまり多くのサンプルを採れなかったことと、比例係数が砂の angle of repose φ にも関係することによって原因すると思われる。しかし、芦田・田中の実験の場合の比例係数 $\alpha f_n(\varphi)$ が他のものより一桁大きい原因は表-1からのみでははっきりしない。他の実験と一番異っている条件は砂の粒径が大きいことであるが、その他 U_* ・水深など特に異った条件ではない。しかし、 $\int_0^\infty S_\eta(k) dk$ と $p \cdot 123$ 表2の α とを比較してみるとスペクトル図の縦軸が1桁大きくなっていることも考えられる。この点を考慮すれば、芦田・田中の実験から得られる比例係数も他のものと

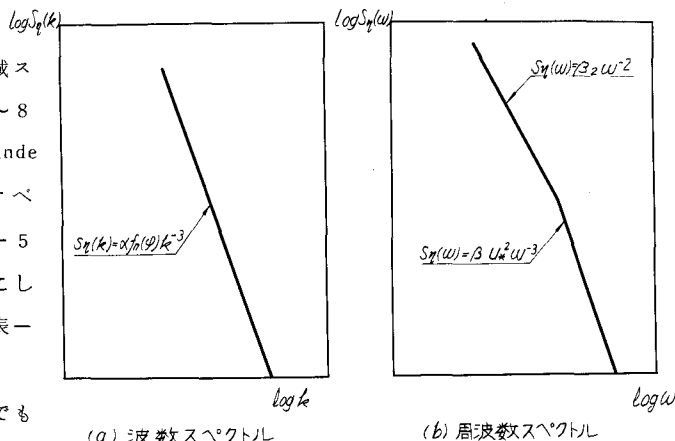


図-1 平衡領域における砂漣のスペクトル

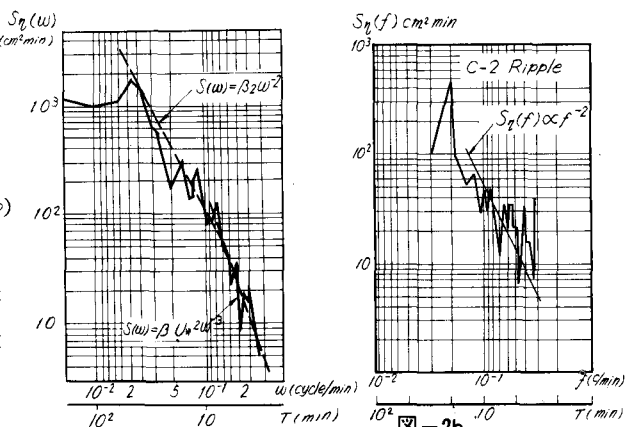


図-2a

砂漣の周波数スペクトル。

式(2.3)と京大の実験¹⁾との比較

図-2b. 砂漣の周波数スペクトル。Rippleの場合の実験¹⁾と式(2.3)との比較

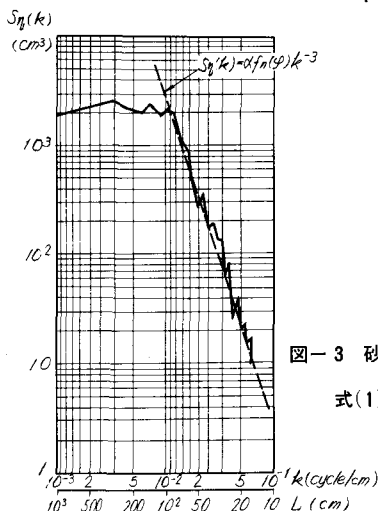


図-3 砂漣の波数スペクトル。

式(1)と京大の実験¹⁾との比較

表-1: 種々の実験結果による“-3乗則”の比例係数

実験者	RUN	水路幅	水深	勾配	流量	U_*	砂量	砂漣の型	限界波数	$\alpha_{fn}(\varphi)$	平均値	備考
芦田・田中 (1967)	A-1	50 cm	11.64	1/400	30	4.37	dm=0.732mm	dune	0.012	2.0×10^{-3}	2.5×10^{-3}	左の2欄の オーダーは $\times 10^{-4}$ である 可能性あり
	A-2		13.89	1/310	50	5.30		dune	0.018	2.7×10^{-3}		
	A-3		7.31	1/600	15	3.03		dune	0.012	2.8×10^{-3}		
福岡 (1967)	1	40 cm	4.4	1/300	7.5	3.8	dm=0.18mm	dune	0.03	2.3×10^{-4}	2.26×10^{-4}	水面に $T=0.7\text{sec}$ の強制波動を起した場合は
	2		4.3	1/180	7	4.84		dune	0.1	2.3×10^{-4}		
	3		3.6	1/150	7	4.85		flat bed	0.03	2.0×10^{-4}		
	4	40 cm	2.8	1/400	5	2.52		standing wave	0.07	2.5×10^{-4}		
	5		3.85	1/230	7	4.05		dune	0.03	2.2×10^{-4}		
Nordin & Algett (1966)	1	0.4 ft	0.400	0.0037	0.697	3.84	fine sand	dune	0.018	3.0×10^{-4}	3.07×10^{-4}	213
	2		0.485	0.0038	0.864	4.00		dune	0.020	5.0×10^{-4}		235
	3		0.580	0.0044	1.05	4.41		dune	0.015	1.2×10^{-4}		131
	4	8.0 ft	0.670	0.00136	1.28	4.82		dune	0.0066	3.0×10^{-4}	3.25×10^{-4}	20
	5		1.05	0.00134	2.22	5.76		dune	0.0039	3.5×10^{-4}		16
	6	9.0 ft	2.60	0.00058	9.40	6.53		dune	0.0016	0.8×10^{-4}	0.9×10^{-4}	13
	7		4.15	0.00058	10.3	8.11		dune	0.0013	1.0×10^{-4}		12

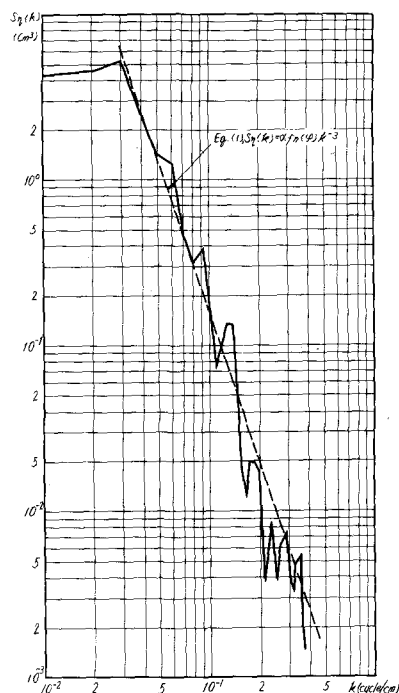


図-4 砂漣の波数スペクトル。式(1)と東京工大の実験²⁾
(吉川・福岡)との比較

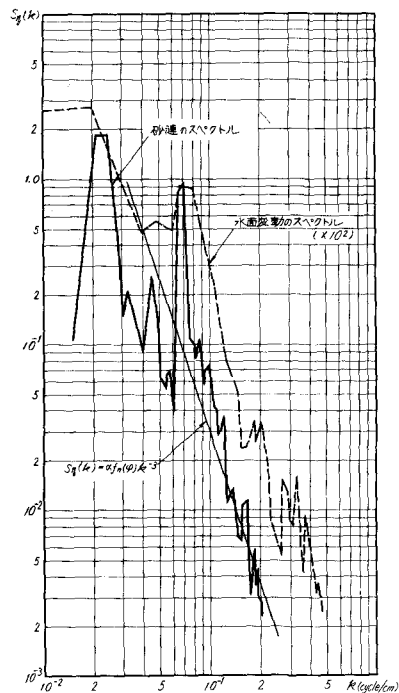


図-5 砂漣の波数スペクトル。東京工大の実験²⁾
一強制的に水面に波を起した場合一との比較

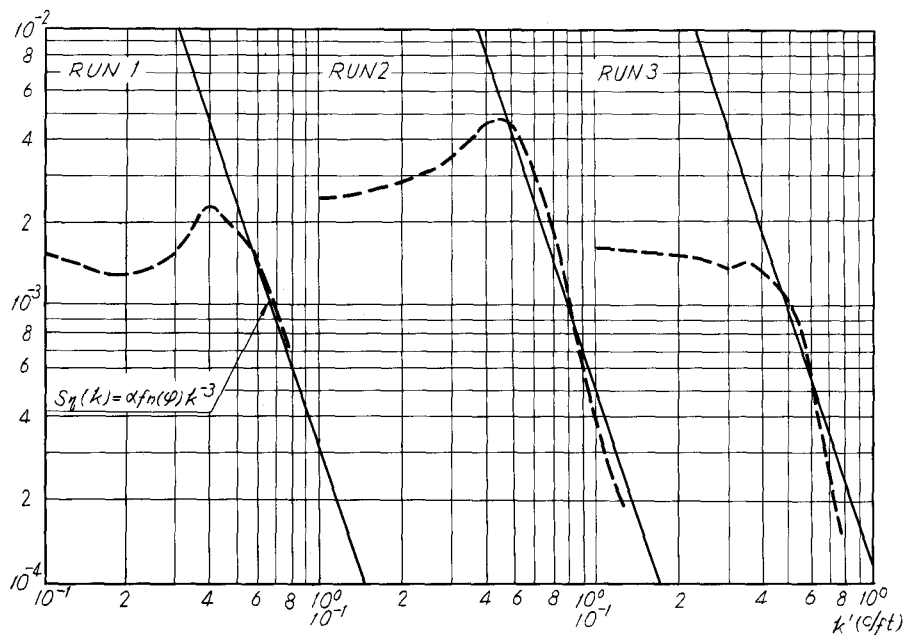


図-6 Nordin & Algertの実験と式(1)との比較(a)

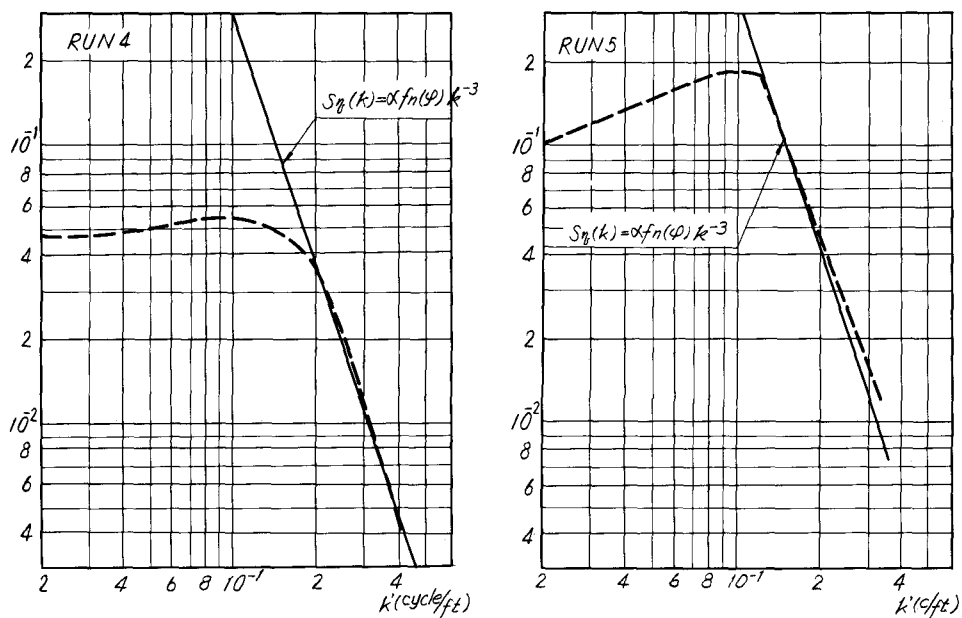


図-7 Nordin & Algertの実験と式(1)との比較(b)

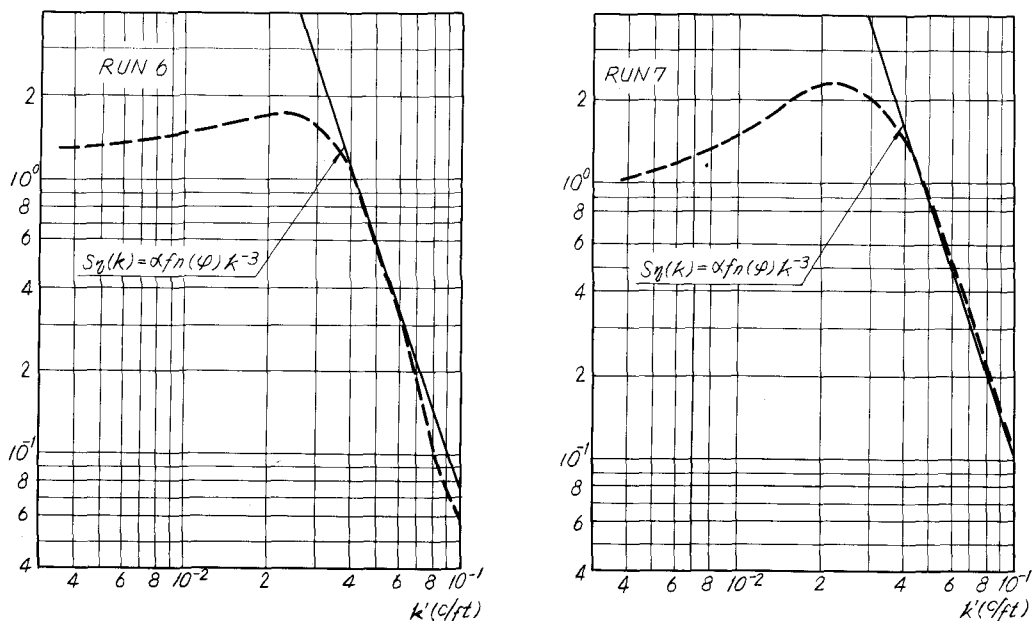


図-8 Nordin & Algertの実験と式(1)との比較 (c)

一になる。また、リップルの周波数スペクトルでは“ -2 乗則”の範囲がかなり広いことが認められたが、実験数は一つのみであるので、今後の実験が必要である。(図-2 b)

3. 結 論

砂漣スペクトル形成の力学機構を考慮して、平衡領域のスペクトルとして“ -3 乗則”が導かれる(周波数スペクトルについてはこの他“ -2 乗則”領域の存在も予測される)。

種々の実験と比較した結果、このスペクトルの関数型の成立する広い領域があることが認められた。式(1)~(3)の比例係数 α 、 β 、 β' は無次元の universal constant で、 $\alpha f_n(\varphi)$ については多くの実験から $(1 \sim 3) \times 10^{-4}$ の値と思われる。数値の開きは、各実験ごとのサンプル数が少なく実験値の信頼性が十分でない点のほか、この値が砂の angle of repose にも関係するためである。平衡領域の砂漣の移動速度は波数には無関係で U_b に比例するが、スペクトルピークに近づくにつれて波数の関数となる。

謝 辞：本研究をまとめるにあたり批判や助力をして下さった東京工大の水工学研究室の諸氏、特に多くの実験データを提供された福岡捷二助手に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 芦田 和男・田中祐一朗 : 砂漣に関する実験的研究, 京都大学防災研究所年報 第10号, 121~132 (1967)
- 2) 福岡捷二 : 砂漣の発生・発達とそのスペクトル, 東京工業大学土木工学科研究報告 第4号 (1967)
- 3) 日野幹雄 : 砂漣スペクトルの平衡領域について, 東京工業大学土木工学科研究報告 第4号 (1967)
- 4) Nordin, C.F. & Algert, J.H. : Spectral analysis of sand waves, Proc. ASCE, vol.92, No.HY-5 (1966)
- 5) Phillips, O.M. : The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves, J.Fluid Mech., vol.4 426~434 (1958)
- 6) Иванов, В.Н. и Стратнович, Р.Л. : К вопросу о Лагранжевых характеристиках турбулентности, Известия Академии Наук, СССР, Серия Геофизическая, No.10, 1581 (1963)