

流れに発生する表面波について (Ⅱ)

名古屋工業大学 細井正延
同 杉山錦雄

1. 要旨

水路床の砂漣や砂堆の発生機構を研究するにあたって、砂漣や砂堆とそれによって誘起される表面波との相互関係が重要な問題として取り上げられ検討されている。^{1), 2)}そこで著者は水路床における鉛直変動速度と表面波の波高、波長、伝播速度との関係及び表面波の発生限界について理論及び実験的検討を行なった。また流水面を上流側に向って伝播する波についての模型実験を行なう場合に、造波板を水路底で上下に動かして波を造る方法が望ましいわけであるが、したがって造波板の上下運動と波の大きさとの関係を予め知ることができれば好都合である。以上のような目的で著者は研究を進め、すでに第10回水理講演会において第一報として報告した。³⁾そこでは直径2.1 cmの円形断面の銅管を、中心間隔を4.2 cm, 6.3 cm, 10.5 cmにして水路底に敷きならべ、底勾配を1/150, 1/250にして実験を行なった結果、流量を増加させるにしたがって大きな波高の表面波が現われること及び流れが一定の水深、流速を超えると急に波が消滅するという現象を見いだした。そして波発生の原因は円形管の後流域内の速度変動であるとの推定を行なった。本論文では、直径3.4 cmの円管を6.8 cm, 10.2 cmの間隔に敷きならべて、第一報におけると同じ実験を行なって発生波の性質を調べた。また流水中の水路底面において上下方向の速度変動を与えた場合の表面波の波高、波長及び発生限界について理論的考察を行ない、さらに静水及び流水中の水路底面で造波板を上下に振動させて上流側に遡上する波を起し、波高、波長を測定して両者の結果を比較した。

2. 理論的考察

富永は流水面に圧力変動を与えた場合に発生する波の大きさ及び発生限界について理論解を求めて実験結果と比較したが⁴⁾、著者は境界条件として水路底で上下方向の速度変動を与え上記と同じ方法で理論的検討を行なった。無渦運動と考えて速度ポテンシャルを φ 、静水面から波面までの高さを η 、流れの一樣流速を U とし、微小振幅波と仮定すると連続式及び表面条件式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$g\eta + \varphi_t + U\varphi_x = 0 \quad (2)$$

$$\eta_t + U\eta_x = \varphi_y \quad (3)$$

(2), (3)式より

$$\varphi_{tt} + U^2 \varphi_{xx} + 2U\varphi_{xt} + g\varphi_y = 0 \quad (4)$$

が得られる。 $f(x)$ のFourier変換及び逆変換は

$$\overline{f(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-isx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(s)} \cdot e^{isx} ds$$

で、またつぎの関係式が成り立つ。

$$\frac{d n f}{d x n} = (1 s) n \cdot \overline{f}(s)$$

以上の関係を用いると(1)及び(4)式は次式で表わされる。

$$\overline{\varphi}_{yy} - S^2 \overline{\varphi} = 0 \quad (1)'$$

$$\overline{\varphi}_{tt} + 2iSU\overline{\varphi}_t + g\overline{\varphi}_y - U^2 S^2 \overline{\varphi} = 0 \quad (4)'$$

(1)' 式の解は

$$\overline{\varphi} = A \cdot e^{sy} + B \cdot e^{-sy}$$

である。いま $y = -h$ (水底) で、 $v = \delta(x) \cdot e^{i\omega t}$ なる上下方向の速度変動を境界条件として与える。そのFourier変換は

$$\overline{v}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-isx} dx = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{-isx} dx$$

で表わされる。(X)をDiracの δ 関数とすると

$$\overline{v}(s) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+0} \delta(x) \cdot e^{-isx} dx = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$

この条件を用いて積分常数Bを定めると

$$\overline{\varphi} = \frac{2A}{e^{sh}} \cosh s(y+h) - \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi} s} \cdot e^{-s(y+h)} \quad (5)$$

となる。(5)式を(4)'式に代入すると

$$A_{tt} + A_t \cdot 2iSU + A(g \tanh sh - U^2 S^2) = -\frac{e^{i\omega t}}{2\sqrt{2\pi} \cosh sh} \left(\frac{\omega^2}{S} + 2\omega U + g + U^2 S \right) \quad (6)$$

となる。初期条件として、 $t=0$ 、 $y=0$ では水面に擾乱が存在しないから、 $\overline{\varphi} = 0$ 、 $\overline{\varphi}_t = 0$ でなければならないので、これから(6)式の積分常数を決定すると(6)式の解はつぎのようになる。

$$A = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} \cdot S \cdot \cosh sh} \left[\frac{gs(\tanh sh + 1) \cdot e^{-i(SU - \sqrt{gs \tanh sh})t}}{\sqrt{gs \tanh sh}(\sqrt{gs \tanh sh} - \omega - SU)} + \frac{gs(\tanh sh + 1) e^{-i(SU + \sqrt{gs \tanh sh})t}}{\sqrt{gs(\tanh sh + 1)}(\sqrt{gs \tanh sh} + \omega + U)} + \frac{2(\omega^2 + 2\omega SU + gs + U^2 S^2) e^{i\omega t}}{(\omega + SU)^2 - gs \tanh sh} \right]$$

$$\therefore \varphi(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-sh} \cdot 2A \cosh s(y+h) - \frac{e^{i\omega t - s(y+h)}}{\sqrt{2\pi} s} \right] e^{ist} \cdot ds$$

(2)式から η を求めるのであるが、ここで

$$X = \frac{gx}{\omega^2}, \quad t = \frac{t^*}{\omega}, \quad S = \frac{\omega^2 S^*}{g}, \quad h = \frac{gH}{\omega^2}, \quad U = \frac{gG}{\omega}$$

のように無次元表示をすると、

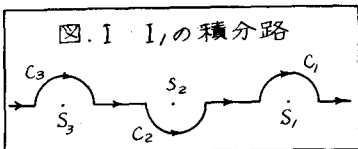
$$g\eta = -(\varphi_t + U\varphi_x)_{y=0}$$

$$= \frac{i\omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-HS^*} (\tanh HS^* + 1)}{(1 + GS^* - \sqrt{S^* \tanh HS^*})} e^{-i(GS^* - \sqrt{S^* \tanh HS^*})t^* + is^*x^*} ds^* + \frac{i\omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-HS^*} (\tanh HS^* + 1)}{(1 + GS^* + \sqrt{S^* \tanh HS^*})} e^{-i(GS^* + \sqrt{S^* \tanh HS^*})t^* + is^*x^*} ds^*$$

$$+\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-HS^*}\{(1+GS^*)^2+S^*\}}{S^*\tanh HS^*-(1+GS^*)^2}e^{i(t^*+s^*x^*)}ds^*+\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-HS^*}(1+GS^*)}{S^*}e^{i(t^*+s^*x^*)}ds^* \quad (7)$$

右辺の第1, 2, 3, 4項の積分を I_1, I_2, I_3, I_4 とおき, 以後は*印を省略する。

I_1 の積分: S の実軸上の積分と, S_1, S_2, S_3 をさける半径 ε の小半円 C_1, C_2, C_3 上の積分の和として考える。ただし S_1, S_2, S_3 は, $1+GS=\sqrt{S \tanh HS}$ の根で二つの正根と一つの負根である $S=S_{1,2,3}+\varepsilon \cdot e^{i\theta}$ において, 積分中の e の指数を計算し, $t \rightarrow \infty$ とすると, $e^{-\infty}=0$ となる。したがって I_1 の中で C_1, C_2, C_3 上の積分は十分に時間が経つと零になる。つぎに S の実軸上の積分は, Kelvin の Stationary Method を用いて行なう。すなわち



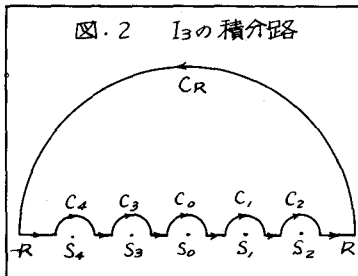
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-HS}(\tanh HS+1)}{1+GS-\sqrt{S \tanh HS}} e^{it(\sqrt{S \tanh HS}-GS-\frac{x}{t})} ds \\ \div \sqrt{\left| \frac{d^2}{ds^2} (\sqrt{S \tanh HS}-GS-\frac{x}{t}) \right|_{s=S_0}} \times \frac{e^{-HS_0}(\tanh HS_0+1)}{1+GS_0-\sqrt{S_0 \tanh HS_0}} \times e^{i\{(\sqrt{S_0 \tanh HS_0}-GS_0)t-S_0x+\frac{\pi}{4}\}} \quad (8)$$

上式の S_0 は, $\frac{d}{ds}(\sqrt{S \tanh HS}-GS-\frac{x}{t})$ の根である。したがって時間 t が十分に大きい場合には (8) 式の右辺は零になる。それゆえに I_1 の積分はつぎのようである。

$$I_1 \div 0 (e^{-t}) + 0 (t^{-1/2})$$

I_2 の積分も I_1 と同じ方法で, t が十分に大きい場合には零になる。

I_3 の積分: Cauchy の積分定理により, 図・2 のような積分路を考えた場合には



$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_R} + \int_{-R}^R \right] = 0 \quad (9)$$

S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 は, $S\{S \tanh HS-(1+GS)^2\}=0$ の根で

あって, $S_0=0, S_1, S_2$ は正の実根, S_3, S_4 は負の実根である。Jordan の補助定理を用いると,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-HS}(1+GS)\{(1+GS)^2+S\}}{S\{S \tanh HS-(1+GS)^2\}} e^{i(t+sx)} ds = 0 \quad (10)$$

となる。また

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \right] = -\pi i \sum_{S_n} \text{Res} = -\pi i \sum_{n=0}^4 \left[\frac{e^{-HS_n}(1+GS_n)\{(1+GS_n)^2+S_n\}e^{i(S_nx+t)}}{\tanh HS_n+HS_n \text{sech}^2 HS_n-2G(1+GS_n)} \right] \quad (11)$$

したがって (9), (10), (11) 式から

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-HS}(1+GS)\{(1+GS)^2+S\}e^{i(t+sx)}}{S\{S \tanh HS-(1+GS)^2\}} ds = \pi i \sum_{n=0}^4 \left[\frac{e^{-HS_n}(1+GS_n)\{(1+GS_n)^2+S_n\}e^{i(S_nx+t)}}{\tanh HS_n+HS_n \text{sech}^2 HS_n-2G(1+GS_n)} \right] \quad (12)$$

S の中で S_3, S_4 は負で, これは下流へ向って伝播する波を表わしているから, ここでは採用しない。また正根 S_1, S_2 の中の S_1 は, $G=0$ (流れがない) とした時の S の値に接続しないから, S_1 だけを考えればよい。 $S_0=0$ の場合も $G=0$ の状態を考えると (12) 式の分母 $=0$ となり, したがって $\eta=\infty$ となつて不合理であるからこれも採用しない。 I_4 の積分も I_1 と同じ方法で計算できるが, すでに $S=0$ は物理的に不合理であることがわかったから, この積分値は採用しない。

以上のことから、(12) 式の実数部をとれば波高の式としてつぎの関係式が成り立つ。

$$\eta = \frac{\omega}{2g} \frac{e^{-HS_1} (1+GS_1) \{ (1+GS_1)^2 + S_1 \} \cos(t+S_1 x)}{\tanh HS_1 + HS_1 \operatorname{sech}^2 HS_1 - 2G(1+GS_1)} \quad (13)$$

流れがないとき、すなわち $G=0$ では(13) 式はつぎのようになる。

$$\eta = \frac{\omega}{2g} \frac{e^{-HS_1} (1+S_1) \cos(t+S_1 x)}{\tanh HS_1 + HS_1 \operatorname{sech}^2 HS_1} \quad (14)$$

波高が理論的に無限大になる（碎波する）条件は、(13) 式の分母が零になることであるから、

$$\begin{cases} \tanh HS_1 + HS_1 \operatorname{sech}^2 HS_1 - 2G(1+GS_1) = 0 \\ 1 + GS_1 = \sqrt{S_1 \tanh HS_1} \end{cases} \quad (15)$$

を満足する H 、 G の値のときである。

上記の解析においては変動速度の振幅を1としており、また無限小の幅に作用していると考えているから、もしもある幅の造波板を変位 a の振幅で上下に動した場合には、(13)、(14) 式の右辺には $a \cdot \omega \cdot \ell$ を乗じなければならない。 ℓ は造波板の幅に関係するところの長さの次元をもつものである。したがって波高を η_m とすると、(13)、(14) 式から次式が得られる。

$$\eta_m = \frac{a\omega^2 \ell}{2g} \frac{e^{-HS_1} (1+GS_1) \{ (1+GS_1)^2 + S_1 \}}{\tanh HS_1 + HS_1 \operatorname{sech}^2 HS_1 - 2G(1+GS_1)} \quad (16)$$

$$\eta_m = \frac{a\omega^2 \ell}{2g} \frac{e^{-HS_1} (1+S_1)}{\tanh HS_1 + HS_1 \operatorname{sech}^2 HS_1} \quad (17)$$

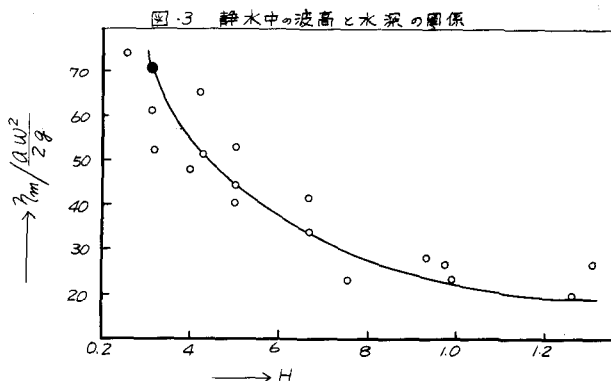
静水状態の水槽の底で造波板を上下に動かして波を発生させる場合の理論解析は、すでに合田が造波板の幅を考慮して行なっている⁵⁾。

3. 実験

水路に種々の流量で通水し、水路下流の一点で造波板を上下に振動させて表面波を起し、(15)~(17) 式を検証した。つぎに水路底に円管を棧状に並べて通水した場合に、水面に現われる波の大きさ、波の消滅限界について(15)~(17) 式によって検討した。

(1) 水路底で造波板を上下に振動させた場合

長さ15m、幅0.6m、高さ0.4mの変換勾配水路の下流端近くの底面に、58×40mmの長方形断面の筒をU字形に接続し、55×37cmの大きさの造波板を筒の接続点で上下に振動させて波を起した。この位置から上流へ8mの所で波形、周期、波速を測定した。水深 h を種々に変え、それぞれ的水深に対して流速 U を変化させて、流水中を上流側へ向って伝播する波を観測した。



最初に $U = 0$ すなわち静水中を伝播する場合について、水深を 12, 15, 20 cm, 造波板の振動周期を 0.8, 1.1, 1.4 sec とし、また振幅 a を 2.0, 3.5, 5.5 cm として実験を行ない、横軸に $H = h \cdot \omega^2 / g = 4\pi^2 h / g T^2$ を、縦軸に $\eta_m / \frac{a \omega^2}{2g}$ をとって実験値をプロットすると図・3 のようになる。図の中の曲線は(17) 式の計算結果である。ただし θ の値が不明であるので、曲線上の一点を・印の位置に合わせた場合のものであるが、 H が大きくなるにしたがって $\eta_m / \frac{a \omega^2}{2g}$ の値が減少する状態は実験結果と非常によく一致していることがわかる。

つぎに $h = 15 \text{ cm}$,

$T = 0.8, 1.1 \text{ sec}$,

$a = 3.5 \text{ cm}$ とし

て、水路勾配を変化さ

せて種々の流速で流

した場合の波高、波

長を測定し、流速に

よってどのような影

響を受けるかについ

て調べた。横軸に G

$= U \omega / g = 2\pi U / T g$

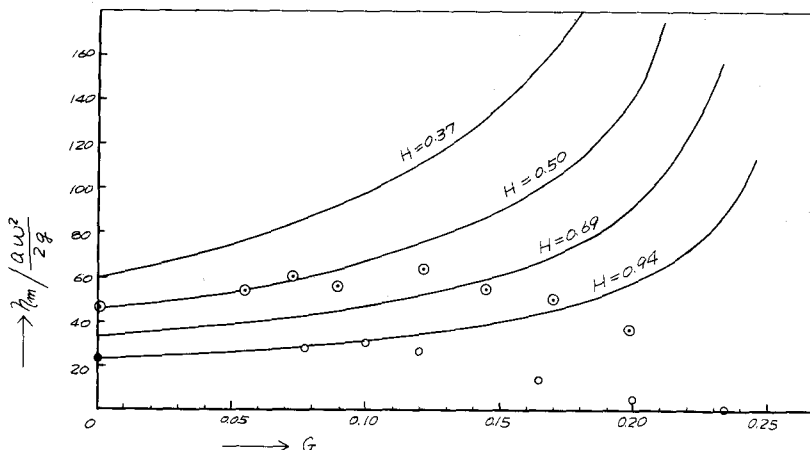
をとり、縦軸に $\eta_m / \frac{a \omega^2}{2g}$

をとり H をパラメーターとして実験値をプロットすると図・4 のようである。図の中の曲線は(16) 式の計算値であるが、この場合にも前と同様の理由で $G = 0$ のときのそれぞれの H に対する値を図・3 の曲線から求め、 $G > 0$ の領域の各曲線を描いたものである。実験値を見ると、 $G < (0.10 \sim 0.11)$ の範囲では G が大きくなるにしたがって $\eta_m / \frac{a \omega^2}{2g}$ の値も増加するが、 G がこれを超えると $\eta_m / \frac{a \omega^2}{2g}$ が減少し、 $H = 0.94$ では $G \approx 0.23$ で、また $H = 0.50$ では $G \approx 0.22$ で波が消滅している。これは理論曲線と較べるとかなり異なった傾向であるが、理論上は波高が無限大になるところの G をもって碎波限界としているが、実際にはある波形勾配に達すると碎波してしまうので実験のような結果になったのであろう。しかしそれにしても $\eta_m / \frac{a \omega^2}{2g}$ の最大値が現われる G の値が小さすぎるように思われるが、その理由は明らかでない。

(2) 水路底に栈を並べた場合

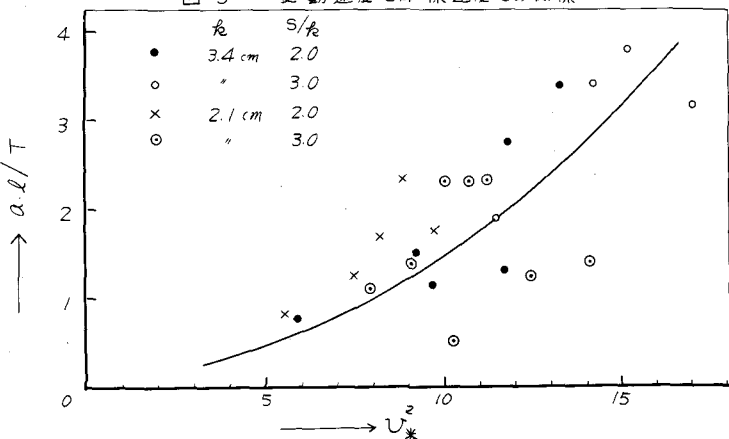
直径 (k) 2.1 cm の円形断面の鋼管を、中心間隔 (S) が 4.2 cm, 6.3 cm にすなわち $S/k = 2, 3$ になるように並べ、水路の底勾配を 1/150, 1/250 にして水深を 4.2 cm までの範囲で通水したところ、水深、流速がある値より小さい場合には水面に上流側へ伝播する規則正しい進行波が発生し、また水深、流速が一定値を超えると進行波が消滅して水面には不規則な微小変動が現われた。その場合の波高、波長と水深、流速との関係等については第10回水理講演会講演集で詳細に述べた。その後にさらに鋼管の直径 3.4 cm のものを $S/k = 2, 3$ になるように並べて水路勾配を 1/150, 1/250 にして実験を行なったところ同様の現象が現われた。以上のすべての実験値に対して表面波の発生限界及び底面の変動速度について、前記の理論結果を用いて検討した。

図 4 流水中の波高と水深・流速との関係

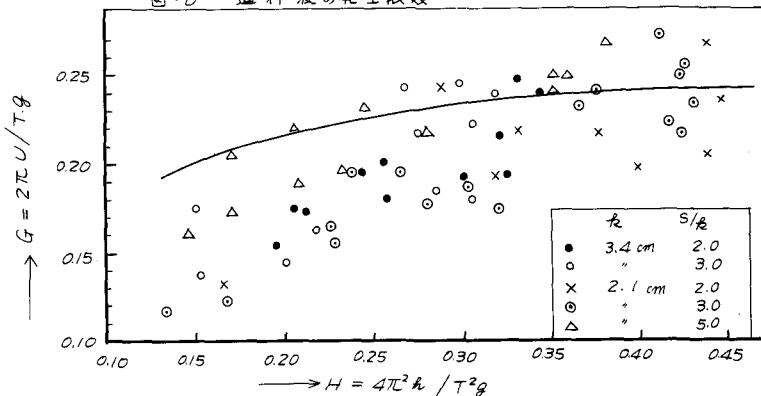


(16)式において、 η 、 T 、 H 、 G に上記の実験で得られた値を代入して $a \cdot \ell / T$ を計算し、同時にそれぞれに対する $\tau / \rho = \overline{u'v'} \propto V_*^2$ の値を算定してそれらの関係を示すと図・5.のようになる。すなわち前回の報告書で、水面に波が発生する原因は水路底面の棧の後流域内の速度変動であることを述べたが、この値を正確に直接測定することが困難であるので、摩擦速度 V_* に比例するとしたわけである。また(16)式からも変動速度の振幅 a/T の値が計算できないので、 $a \cdot \ell / t$ で代用した。図から $a \cdot \ell / T$ は V_* が増加するにつれて大きくなることがわかる。

図・5 変動速度と摩擦速度との関係



図・6 進行波の発生限界



つぎに波の発生限界について検討した。横軸に H を

、縦軸に G をとって、進行波が発生した場合の実験値を全部プロットすると図・6のようであり、また(15)式を計算して描いたのが同図の曲線である。実験値の方が理論値よりもやや大きなものがあるが、これらの点は波高が最大値を経てふたたび小さくなったものであって、最大波高を表わす点は理論曲線上にほぼのっているので、実験値と理論値はよく一致していると見ることができる。 $k = 2.1$ cm、 $s/k = 5$ の状態では、進行波は発生するが波高は小さくかつ波形がくずれて不規則であった。それらの H 、 G の関係も図に示されているが、すべての点が限界曲線の近傍にあることがわかる。したがって水路勾配をさらに緩くし流速を小さくして実験を行えば、 $S/k = 5$ の場合でも規則的な進行波が発生するであろう。

参考文献

- 1) 松梨順三郎：流れと波の共存系の一解法について，第10回水理講演会講演集，昭41
- 2) 土屋昭彦・石崎勝彦：Sand Wave に関する研究，第11回水理講演会講演集，昭・42
- 3) 細井正延・杉山錦雄：流水の中に発生する波の実験的研究(1)，第10回水理講演会講演集，昭41
- 4) Masahide Tominaga: On the Waves Generated Over the Steady Uniform Current (Part 1), Journal of the Oceanographical Society of Japan, 20th Anniversary Vol., 1962
- 5) Y. Ooda and T. Kikuya: The Generation of Water Waves with a Vertically Oscillating Flow at a Channel Bottom, Report of Port and Harbour Technicol Research Institute, No. 9, 1964