成層流体における乱流拡散の理論的考察

運輸省港湾技術研究所　浜 田 徳 一

1.　$y=0$ の平面を $t=0$ に出発するランダムな y 方向の速度 v をもつ拡散量の拡散係数は $t=t$ (≥ 0) において

$$\overline{\left(Y\frac{dY}{dt}\right)_t}=\int_0^t \overline{v(t)\,v(t-\zeta)}\,d\zeta \tag{1}$$

で表わすことが出来る。一般にはこれは stationary, homogeneous な状態を仮定して,[1] Lagrange 相関 $\overline{v(t)\,v(t-\zeta)}$ が ζ のみの函数 $R(\zeta)$ で表わし得る場合を用いるが，原則としては(1)式は homogeneous の仮定は必要であるが，stationary の仮定は必要とせず，$\overline{v(t)\,v(t-\zeta)}$ は上に示した $t=0$ からの出発に対して，非定常状態として $R(t,\zeta)$ とおいて差支えない。[※-(1)] この事は拡散方程式について初期値問題として $t=0$ に $y=0$ を出発する拡散量を解くとき，拡散係数が t のみの函数であれば容易に示すことができる。

(1)式では時間 t を用いているが，$x=Ut$ （U：一様な x 方向の速度）の変換を行なえば，$t=0$ に $x=0$ を出発した拡散量が $x=x$ $(x=Ut)(\geq 0)$ において示す拡散係数を意味する。たとえば，以下にのべる計算は $x\leq 0$ に対しては stationary, homogeneous （流体の密度成層がない）を仮定し，$x\geq 0$ に対しては一様な密度成層があり,[※-(2)] $x\geq 0$ に向い拡散量が移送されるとき，近似的には $x=Ut$ の変換で $t\geq 0$ に対する非定常な拡散として取扱いうる場合に相当する。[※-(1)] この場合，Lagrange 相関 $\overline{v(t)\,v(t-\zeta)}$ は同じ実験条件のもとで多数の回数の同種の実験をくりかえし，$t=t$ において $v(t)\,v(t-\zeta)$ の標本平均を求めることを意味する。stationary を仮定すれば，任意の t における $v(t)\,v(t-\zeta)$ の時間的平均に置換えできる。[※-(2)] この仮定を実在の問題に適用するにはさらに慎重な考慮を必要としょう。しかし大きな密度勾配のある限られた層における流体混合の問題は別に筆者は論を進めており，ここでは除外する。

2.　x 方向に一様で y 方向に密度勾配のあるとき，流体は非圧縮とし，mass diffusivity は無視して，せつ動流のエネルギーの表示式を求めよう。ただし x 軸は水平で一般流 $U(y)$ の方向と一致し，y 軸は垂直上向き，z 軸は (x,y) 平面に垂直とする。計算の結果は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_1^2+v_1^2+w_1^2)+\frac{U(y)}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u_1^2+v_1^2+w_1^2)+u_1v_1\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\nu u_1\Delta\rho}{\bar\rho}\nabla^2U-gv_1\frac{\Delta\rho}{\bar\rho}-\frac{1}{\bar\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u_1\Delta p)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(v_1\Delta p)+\frac{\partial}{\partial z}(w_1\Delta p)\right\}+\{u_1\nabla^2u_1+v_1\nabla^2v_1+w_1\nabla^2w_1\} \tag{2}$$

ここに $\bar\rho$ はある点における密度の時間的平均値であり，$\Delta\rho$ はその瞬間の変動値である。(2)式は乱れによる拡散をともなう速度変動にも，また波による規則的な速度変動にも同様に使用することができるが，今の問題では変動は乱れによるランダムな変動に限定する。(2)式の右辺第1項は無視してよい。

(2)式において $\Delta\rho\to 0$ となり，かつその場合には運動は定常に維持されると考えよう。そのときは

ある点において(2)式の時間的平均をとることが許され，$\overline{u_1 v_1}$ はReynolds 応力となり，(2)式は，$\overline{u_1 v_1}\dfrac{\partial U}{\partial y}$ による一般流からのエネルギー輸送が，右辺の粘性損失および圧力動揺による外部に対する仕事として消失し，定常状態が維持されることを示している。この場合，Reynolds応力により，せつ動流から一般流にエネルギーが流れるとか，あるいは注目している流体部分の外部から仕事をされることが考えられるが，現在の問題では上記の様に簡単に考える。もしこのとき(2)式の左辺の運動エネルギーの変化の項と，右辺の $-g\,\overline{v_1 \varDelta\rho}/\bar{\rho}$ との項がせつ動的に加えられたとすれば，運動エネルギーの減衰は主として $-g\,\overline{v_1 \varDelta\rho}/\bar{\rho}$ によりなされる密度の拡散により，ポテンシャルエネルギーの増加，あるいはまた一般流のカイネテックエネルギーの増加に使用せられたものと考えることができる。

この時は非定常となるため，平均量の設定は $t=t$ における標本平均となるが，その場合においても $<u_1 v_1>_t$ が(2)式においてReynolds応力と同様の力学的役割を持つことは明らかである。この様にして $t\leq 0$（または $x\leq 0$）に対して定常，$t\geq 0$（または $x\geq 0$）に対しては $\varDelta\rho\neq 0$ による非定常な運動を考えることとする。

今成層は安定成層であり（$\dfrac{\partial\rho(Y)}{\partial y}<0$，$Y$ は(1)式と同意），またポテンシャルエネルギーの変化のみに問題を限定すれば，$t\geq 0$ の運動のもっとも簡単な表現として

$$\frac{dv'}{dt}=\frac{dv}{dt}-\frac{\rho(0)-\rho(Y)}{\rho(0)}\,g \tag{3}$$

をうる。ただし v は定常状態における垂直速度，v' は密度成層のために生じた非定常状態における垂直速度である。(3)式を用いて考えている非定常状態の拡散係数を定常状態のそれからせつ動により求め様とする。

3. (3)式より

$$v'(t)-v'(0)=v(t)-v(0)-\int_0^t\frac{\rho(0)-\rho(Y(t'))}{\rho(0)}\,g\,dt' \tag{4}$$

$$v'(t-\zeta)-v'(0)=v(t-\zeta)-v(0)-\int_0^{t-\zeta}\frac{\rho(0)-\rho(Y(t''))}{\rho(0)}\,g\,dt'' \tag{5}$$

いま用いられる仮定では $v'(0)=v(0)$ が成立する。故に

$$<v'(t)\,v'(t-\zeta)>_t=<\left\{v(t)-\int_0^t\frac{\varDelta\rho(Y(t'))}{\rho(0)}\,g\,dt'\right\}\left\{v(t-\zeta)-\int_0^{t-\zeta}\frac{\varDelta\rho(Y(t''))}{\rho(0)}\,g\,dt''\right\}>_t \tag{6}$$

$<\ >_t$ は時刻 t（≥ 0）における標本平均を意味する。(6)式は

$$<v'(t)\,v'(t-\zeta)>_t=<v(t)\,v(t-\zeta)>_t-<v(t)\int_0^{t-\zeta}\frac{\varDelta\rho(Y(t''))}{\rho(0)}\,g\,dt''>_t$$

$$-<v(t-\zeta)\int_0^t\frac{\varDelta\rho(Y(t'))}{\rho(0)}\,g\,dt'>_t+<\int_0^t\frac{\varDelta\rho(Y(t'))}{\rho(0)}\,g\,dt'\int_0^{t-\zeta}\frac{\varDelta\rho(Y(t''))}{\rho(0)}\,g\,dt''>_t \tag{7}$$

$$\rho(0)-\rho(Y(t'))=\varDelta\rho(Y(t'))=-\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}(0)\,Y(t') \tag{8}$$

とする。このとき定常状態からのせつ動を行なうため，$-\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}(0)\ (>0)$ は小であり，かつ考えている領域内でほぼ一様であるとする。よって(7)式は

$$< v'(t)\, v'(t-\zeta) >_t = < v(t)\, v(t-\zeta) >_t - \beta g < v(t) \int_0^{t-\zeta} Y(t'')\, dt'' >_t$$

$$-\beta g < v(t-\zeta) \int_0^t Y(t')\, dt' >_t + \beta^2 g^2 < \int_0^t Y(t')\, dt' \int_0^{t-\zeta} Y(t'')\, dt'' >_t \tag{9}$$

ただし，$-\dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial y}(0) \Big/ \bar{\rho}(0) \times g = \beta g$ とおく。

代表的な計算として右辺第２項のみをとりあげれば

$$\int_0^{t-\zeta} Y(t'')\, dt'' = \int_0^{t-\zeta} \int_0^{t''} v'(t_1)\, dt_1\, dt'' = \left| t'' \int_0^{t''} v'(t_1)\, dt_1 \right|_0^{t-\zeta} - \int_0^{t-\zeta} t'' v'(t'')\, dt''$$

$$= \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t'')\, v'(t'')\, dt''$$

これに(4)式を用いて，(9)式の右辺第２項は

$$-\beta g < v(t) \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1)\, v'(t_1)\, dt_1 >_t = -\beta g < v(t) \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1) \{ v(t_1) - \int_0^{t_1} \frac{\Delta\rho(Y(t_2))}{\rho(0)} g\, dt_2 \} dt_1 >_t$$

$$= -\beta g < v(t) \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1)\, v(t_1)\, dt_1 >_t + (\beta g)^2 < v(t) \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1) \int_0^{t_1} Y(t_2)\, dt_2\, dt_1 >_t$$

$(\beta g)^3$ 以上の高次の項を無視すれば

$$= -\beta g < v(t) \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1)\, v(t_1)\, dt_1 >_t + (\beta g)^2 < v(t) \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1) \int_0^{t_1} (t_1-t_2)\, v(t_2)\, dt_2\, dt_1 >_t$$

上式に現われた粒子速度は定常過程のもののみである。よって

$$= -\beta g \int_\zeta^t (\tau-\zeta)\, R(\tau)\, d\tau + (\beta g)^2 \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1) \int_{t-t_1}^t (t_1 - t + \tau_1)\, R(\tau_1)\, d\tau_1\, dt_1$$

同様の計算を(9)式右辺第３，４項についても行ない，$(\beta g)^2$の項までをとれば，

$$< v'(t)\, v'(t-\zeta) >_t = R(\zeta) - \beta g \int_\zeta^t (t-\zeta)\, R(t)\, dt - \beta g \int_0^t \tau R(\tau-\zeta)\, d\tau$$

$$+ (\beta g)^2 \int_0^{t-\zeta} (t-\zeta-t_1) \int_{t-t_1}^t (t_1-t+\tau_1) R(\tau_1)\, d\tau_1\, dt_1 + (\beta g)^2 \int_0^t (t-t') \int_{t-\zeta-t'}^{t-\zeta} (t'-t+\zeta+\tau_2)\, R(\tau_2)\, d\tau_2\, dt'$$

$$+ (\beta g)^2 \int_0^t (t-t'') \int_{t''-t+\zeta}^{t''} (t-\zeta-t''+\tau_3)\, R(\tau_3)\, d\tau_3\, dt'' \tag{10}$$

4.　(10)式を用い，具体的な$< v'(t)\, v'(t-\zeta) >_t$およびそれを用いての$< Y' \dfrac{dY'}{dt} >_t$を求める。定常状態における相関関数$R(\tau)$としては[2]

$$R(\tau) = A_0\, e^{-a|\tau|} \tag{11}$$

この$R(\tau)$はスペクトルム関数として適切なものを与え，しばしば使用されているが，$\lim_{\tau\to0} \dfrac{\partial R}{\partial \tau} \neq 0$の形をとるため，$\tau \to 0$ の近傍では(3)式の$\dfrac{dv}{dt}$を正確に表現することができない。しかしそれを除いてはランダムな乱れのLagrange 相関として妥当な近似といってよいであろう。

(1)式より$\zeta \geq 0$ の場合を考えることとなるが，(10)式では$R(\tau)$のτは正負いずれもの符号をとり得るため，計算には注意を要する。計算の結果は

$$< v'(t)\, v'(t-\zeta) >_t = A_0 e^{-a\zeta} - \beta g \frac{A_0}{a} \{ -e^{-at} (t-\zeta+\frac{1}{a}) + \frac{2}{a} e^{-a\zeta} - e^{a\zeta-at} (t+\frac{1}{a}) + 2\zeta \}$$

$$+ \beta^2 g^2 \frac{A_0}{a} \{ -\frac{1}{6}(t-\zeta)^3 e^{-at} - (t-\zeta)^2 \frac{1}{2\alpha} e^{-at} - (t-\zeta) \frac{2}{\alpha^2} e^{-at} - \frac{2}{\alpha^3} e^{-at} + \frac{3}{\alpha^3} e^{-\alpha\zeta} + \frac{3\zeta}{\alpha^2} - \frac{2t}{\alpha^2} e^{-a(t-\zeta)} - \frac{2}{\alpha^3} e^{-a(t-\zeta)}$$

$$+\frac{2}{3}\zeta^3-\frac{t^3}{6}e^{-a(t-\zeta)}-\frac{t^2}{2a}e^{-a(t-\zeta)}-t^2\zeta+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{a^3}-\frac{t^2-\zeta t}{a}\} \tag{12}$$

$$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t=\frac{A_0}{a}(1-e^{-at})-\beta g\frac{A_0}{a}(-\frac{t^2}{2}e^{-at}-\frac{1}{a^2}e^{-at}-\frac{t}{a}+t^2+\frac{1}{a^2})$$

$$+\beta^2g^2\frac{A_0}{a}\{(-\frac{t^4}{24}-\frac{t^2}{2a^2}-\frac{1}{a^4})e^{-at}+\frac{1}{3}t^4-\frac{2}{3}\frac{t^3}{a}+\frac{t^2}{a^2}-\frac{t}{a^3}+\frac{1}{a^4}\} \tag{13}$$

以上の計算の特性的な値を示すため，遅滞時間Tを用いる。Tは現在の問題では

$$T=\frac{1}{a}=\int_0^\infty e^{-a\tau}d\tau \tag{14}$$

$<v'^2>_t$について計算の結果は

i) $t\to 0$では

$$<v'^2>_t\to A_0 \tag{15-1}$$

ii) $t\to T$では

$$<v'^2>_t=A_0-\beta gA_0\times 0.5284T^2+\beta^2g^2A_0\times 0.233T^4\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{15-2}$$

iii) $t\to 5T$では

$$<v'^2>_t=A_0-\beta gA_0\times 1.919T^2+\beta^2g^2A_0\times 61.72T^4\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=A_0-\beta gA_0\times 0.0767(5T)^2+\beta^2g^2A_0\times 0.0987(5T)^4\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{15-3}$$

iv) $t\gg T$では

$$<v'^2>_t\to A_0-\beta gA_0\times 2T^2+\beta^2g^2A_0\times\frac{2}{3}t^3T\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=A_0-\beta gA_0\times 2(\frac{T}{t})^2t^2+\beta^2g^2A_0\times\frac{2}{3}\frac{T}{t}t^4\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{15-4}$$

$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t$についての計算の結果は

i) $t\to 0$では

$$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t\to 0 \tag{16-1}$$

ii) $e^{-at}\simeq 1-at$のとき

$$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t=A_0t-\beta g\frac{A_0}{a}\frac{t^2}{2}+\beta^2g^2\frac{A_0}{a}(\frac{1}{2}\frac{t^2}{a^2}-\frac{1}{6}\frac{t^3}{a}+\frac{7}{24}t^4)\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{16-2}$$

となるが，tの高次の項は(11)式の$R(\tau)$が$\tau\to 0$の近傍で不適合のため生じたものと考えられ，右辺第1項のみをとれば

$$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t\to A_0t \tag{16-2)'$$

iii) $t\to T$では

$$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t=A_0T\{0.6321-\beta g\times 0.4482T^2+\beta^2g^2\times 0.09946T^4\cdots\cdots\cdots\cdots\} \tag{16-3}$$

iv) $t\to 5T$では

$$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t=A_0T\{0.9933-\beta g\times 20.91T^2+\beta^2g^2\times 145.7T^4\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

$$=A_0T\{0.993-\beta g\times 0.836(5T)^2+\beta^2g^2\times 0.233(5T)^4\cdots\cdots\cdots\cdots\} \tag{16-4}$$

V) $t > T$ では

$$< Y'\frac{dY'}{dt}>_t = A_0 T\{1-\beta g t^2+\beta^2 g^2\frac{1}{3}t^4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\} \tag{16-5}$$

(15), (16)の各式からつぎの結果が得られる。

a) $t \to 0$ の近傍では $<v'^2>_t$, $<Y'\frac{dY'}{dt}>_t$ ともに定常状態のそれから変化はない。

b) $t \geq T$ では $<v'^2>_t$, $<Y'\frac{dY'}{dt}>_t$ ともに定常状態（$\beta g=0$）のものより減少することを示すが，$<Y'\frac{dY'}{dt}>_t$ の減少の方が $<v'^2>_t$ のそれよりも大きい。たとえば $t \to T$ の時，$\beta g t^2 \to 1$ とすれば，(15-2), (16-3) 両式より

$<v'^2>_t/A_0 = 1 - 0.5284 + 0.233 \cdots\cdots \fallingdotseq 0.704$

$<Y'\frac{dY'}{dt}>/0.6321 A_0 T = (0.6321 - 0.4482 + 0.0994\cdots\cdots) \div 0.6321 \fallingdotseq 0.448$

t が T よりも十分大きい時，(15)式，(16)式が収束するためには βg が十分小であることが必要であると考えられるが，その場合においても $<Y'\frac{dY'}{dt}>_t$ の減少は $<v'^2>_t$ のそれよりも急速であることは明らかである。

もし拡散の途中で流体の混合を考えるときは，とりあつかいは複雑となり，たとえば遅滞時間 T ごとに完全な混合が生ずる場合，(3)式は

$$\frac{dv'}{dt}=\frac{dv}{dt}-\frac{\rho(Y(nT))-\rho(Y(t))}{\rho(Y(nT))}g \tag{3)'$$

$v'(0)=v(0)$ を用い，かつ各混合における速度の不連続を無視すれば

$$\begin{aligned} v'(t) = v(t) &- \sum_{m=0}^{n-1}(\beta g)\int_{mT}^{(m+1)T}\{(m+1)T-t^{(m)}\}\,v'(t^{(m)})\,dt^{(m)} \\ &-\beta g\int_{nT}^{t}(t-t')\,v'(t')\,dt' \end{aligned} \tag{4)'$$

となる。しかしこの場合においても上述の傾向には変化はないものと考えられる。

5. (2)式において非定常状態が $-g v_1 \frac{\Delta\rho}{\rho}$ の項により生ずるものとすれば，同種の実験における標本平均をとることにより

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_1^2+v_1^2+w_1^2)} = -g\overline{v_1 \Delta\rho}\frac{1}{\bar{\rho}} \tag{17}$$

$\overline{v_1\Delta\rho}$ は混合距離理論に類似の方法により表現すれば

$$-g\overline{v_1\Delta\rho}\frac{1}{\bar{\rho}} = gK\overline{v_1^2}T\ \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}\Big/\bar{\rho} \tag{18}$$

ただし K は附加常数（>0）とする。よって(17)式は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u_1^2+v_1^2+w_1^2)} = -g\beta K v_1^2 T$$

$\overline{u_1^2} \simeq \overline{v_1^2} \simeq \overline{w_1^2}$ として，（この仮定は K の値の決定と関係し，ここでは単に便宜的なものにすぎない）

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{v_1^2} = -g\beta K\overline{v_1^2}\,T \tag{19}$$

これから

$$\overline{v_1^2} = (\overline{v_1^2})_{t=0}\, e^{-\frac{2}{3}\beta g K T t} \tag{20}$$

この式は βg が非常に小さいとの仮定は一応含んでいない。(20) 式を展開すると，

$t \to T$ の時

$$\overline{v_1^2} = (\overline{v_1^2})_{t=0} \{ 1-0.666\beta g K T^2 + 0.222\beta^2 g^2 K^2 T^4 \cdots\cdots\cdots\cdots \} \tag{21-1}$$

$t \to 5T$ の時

$$\overline{v_1^2} = (\overline{v_1^2})_{t=0} \{ 1-0.133\beta g K (5T)^2 + 0.00888\beta^2 g^2 K^2 (5T)^4 \cdots\cdots\cdots\cdots \} \tag{21-2}$$

これを (15-2), (15-3) 式と比較すれば，(15-2) 式と (21-1) 式とは $K \to 1$ で比較的よい一致を示すが，(15-3) 式と (21-2) 式との一致は不良である。これからすれば混合距離理論的な取扱いの妥当な範囲は遅滞時間 T 程度の短かい時間経過に限られると考えられる。

ふたたび(2)式にかえり，時間平均の意味においても，標本平均の意味においても，運動量の交換係数が左辺第3項 $\overline{u_1 v_1}\dfrac{\partial U}{\partial y}$ から現われることは確かである。$-\rho\overline{u_1 v_1}$ は Reynolds 応力またはそれと同等の力学的意味を持つ。この項は運動量交換係数 η_M を用いれば，$\eta_M(\dfrac{\partial U}{\partial y})^2$ となり，ここに現われ $(\dfrac{\partial U}{\partial y})^2$ と既述の計算に用いられたパラメータ βg とはリチャードソン数を形成する。この場合 $\overline{u_1 v_1}$ の値の非定常状態における変化は (15-1, 2, 3, 4) 式に計算された $\langle v'^2 \rangle_t$ の変化とその傾向が似ているものと考えられる。したがって $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ の変化を無視すれば，※-3 η_M が $\beta g \neq 0$ のために生ずる変化もまたそれと同様となる。これに対し，すでに計算した如く，塩分，染料その他の拡散量についての拡散係数 $\langle Y'\dfrac{dY'}{dt} \rangle_t$ は $\langle v'^2 \rangle_t$ よりも減少の傾向がはなはだしい。この特性は $\dfrac{dU}{dy} \neq 0$ の Shear 流れ中においても変らないであろう。そして既述の計算は βg が小さい場合に限定せられているが，おそらく，この現象が現在までの観測結果から多く指摘せられている[3]密度勾配のある場合の上記の両拡散係数の間に見られる差異の原因の一つをなすものであろう。※-(3)境界の近くでは $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ は $\langle v'^2 \rangle_t$ の変化に敏感であろうが，この取扱いでは壁から十分はなれ，近似的に homogeneous を仮定している。

附記

(i) $\langle\ \ \rangle_t$ は時刻 t における標本平均の意味に用いるのが妥当な場合について $\overline{(\ \ )}$ は標本平均の意味にも，また時間的平均の意味にも用い得る場合に使用している。

(ii) 熱の乱流拡散係数 η_H が運動量交換係数 η_M よりも安定大気中で小であることも，水中の場合と同様に指摘せられているが，Lumley & Panofsky[4]では安定大気中で乱流的性質が弱まり，波動的性質が強まるためであろうとされている。

参考文献

(1) Corrsin, S. ; Theories of turbulent dispersion, Mechanique de la turbulence, 1962.

(2) Taylor, G. I. ; Diffusion by continuous movements, Proc. Lond. Math. Soc. A 20, 1921.

(3) Munk, W. H. & E. R. Anderson ; Notes on a theory of the thermocline, J. Marine Res., vol. Ⅶ, 1948.

(4) Lumley, J. L. & H. A. Panofsky ; The structure of atmospheric turbulence, Interscience, 1964.