

成層乱流中の塩分鉛直分散に対する乱子モデルの応用

京都大学農学部 南 勲

淡水湖による水利用を考える際、一般に下層に塩分が貯留し、上層が淡水で覆われる場合を想定することが多い。あるいは、水位差の少ない河口においても、下層に塩水、上層に淡水という密度流の存在が確認されている。この下層塩分は上層を流れる淡水の運動に伴って、僅かずつ鉛直方向に混合拡散を行っているが、流れが二層流の場合に対する研究は G.H. Keulegan¹⁾ 等研究によつて代表されているが、流れの成層状乱流の場合に対しては、本式が必ずしも十分な説明を与えていないと考えられる。以上の問題に対し筆者は、井上隆士²⁾によつて提案された乱子モデルの適用を試み、成層乱流中における塩分の鉛直分散に対して、ミクロな面から説明を試みた。なお本研究は現在出発点であり、充分実験的な検討を終へてないが、主として理論的説明を試みたので、御批判をいただければ幸と思う。

1 成層乱流の構造

成層乱流中の塩分分散を取り扱う厳密な方法には乱流の運動方程式と塩分分散の式とを同時に解くマイクロな解法が考えられるが、本文では、この現象を乱子の鉛直方向運動を考えて、ミクロな面から検討した。このために、まず図1. $Q \cdot b \cdot C$ の3種類塩分濃度鉛直分布を想定した。この想定した濃度分布のもとで、内部境界面（躍層）上に存在する乱子による塩分の分散がどのように変化するかを、理論的に検討した。すなわち成層乱流の水理学的構造として、平均流速 U で一様に流れている平均流の中で、無数の乱子が等方性乱流のスペクトル配列をもつて運動していたものが、密度成層によつて、その乱子運動をどのように変化するであろうかという問題を解析の目標とした。一般に塩分の拡散は乱子運動のエネルギーに依存すると考えられるわけであり均一な密度流体内部乱流運動のエネルギーと成層乱流中の乱子運動のエネルギーとを対比して成層乱流中における塩分分散の抑制作用を検討しようとしたものである。この研究のために成層乱流の水理学的構造に対し、以下の仮定をおく。

- a. 水平方向の平均流速は、全断面一様流速 U で流れる。
- b. 乱子運動に対しては、鉛直方向運動のみを一次元的に取り扱い、水平方向拡散については考えない。
- c. 乱子運動のエネルギーは、淡一塩躍層の中央に引かれた水平線上において取り扱うものとする。
- d. 運動に対し、壁面、水面のおよぼす影響は無視する。
- e. 安定性密度流すなわち下層に比重の重い水が存在し、上層に比重の軽い水がある場合を取り扱う。
- f. 鉛直方向に対する平均流速は存在しない。
- g. 乱子の形は球形とし、鉛直方向に変化する密度の流れ中で、の乱子運動においては、変位しても、元の乱子密度を保持する。
- h. 水平方向の平均流速は鉛直方向密度分布によつて変化を受けないものとする。

1) G.H. Keulegan The mechanism of an arrested saline wedge. Estuary and coastline hydrodynamics, p.558, McGraw-Hill.

2) 井上隆一 地上風の構造 農業技術研究所報告 A 第2号 昭和27年

2 成層乱流中の塩分濃度分布

成層乱流中の塩分濃度分布は、図1 a. b. c に示す 直線こう配、指数分布および、2層分布の3種類を仮定した。

(a) のモデルにおける y 点の密度は

$$\rho_y = \rho_0 (1 - \kappa y) \quad (1)$$

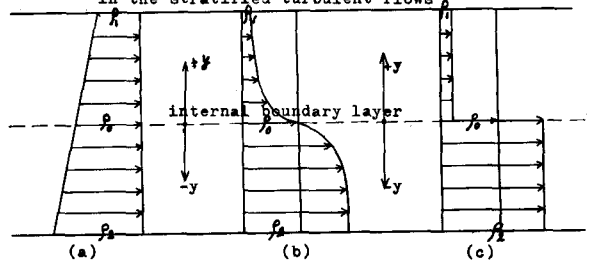
(b) のモデルにおける y 点の密度

$$\rho_y = \rho_0 \left(1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{e^{-\alpha y^2}}{2\rho_0} \right) \quad (2)$$

(c) のモデルにおける y 点の密度

$$\left. \begin{aligned} \rho_y &= \rho_0 - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) & y > 0 \\ &= \rho_0 + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) & y < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Fig.1 The models of the vertical density distribution in the stratified turbulent flows



3 乱子モデル

井上博士による乱子モデルにより次の定義を使用する。

c (a) 乱子の直径 Λ_0 = 最大乱子, Λ_∞ = 最小乱子, Λ_n = 中間乱子 k_∞ = 最小乱子の波数

$$\Lambda_\infty = 2\pi \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (\text{Heisenberg}), \quad k_\infty = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4}$$

$$\Lambda_0 \div \text{水深} \quad \text{通過時間 } T_n = \frac{\Lambda_n}{U} \quad \text{角速度 } \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \quad \text{波数 } k_n = \frac{\omega_n}{U} = \frac{2\pi}{T_n U}$$

$$\text{波長 } L_n = U T_n = \frac{2\pi}{k_n} = \Lambda_n$$

(b) 波数に対する乱流エネルギー分布

$$F(k_n) = \frac{2}{3} \frac{k_n^{-5/3}}{k_0^{-2/3} - k_\infty^{-2/3}} \quad (4)$$

(c) 乱子の階数に対する乱流エネルギー分布

$$F\left(\frac{2\pi}{\Lambda_n}\right) = \frac{1}{3\pi} \frac{\Lambda_n^{5/6}}{\Lambda_0^{2/3} - \Lambda_\infty^{2/3}} \quad (5)$$

(d) (a) モデルに対する乱子の平均密度

図2に示すところにより

$$\rho_n = \rho_0 \quad (6)$$

(b) モデルに対する乱子の平均密度

図3に示すところにより

$$\rho_n = \rho_0 \quad (7)$$

Fig.2 The turbulent model of a-distribution

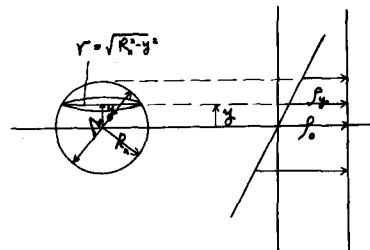


Fig.3 The turbulon model of b- distribution

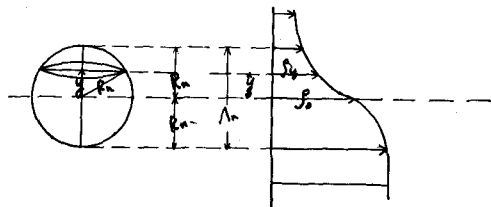
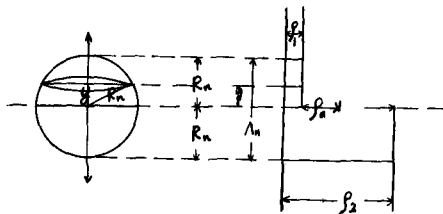


Fig.4 The turbulon model of c- distribution



(c) モデル に対しては、図4に示すところにより その乱子 の平均密度は $\rho_n = \rho$

(e) 乱子の寸法 に対応する 密度こう配

a- モデル に対し $\rho_n = \kappa$ (8) b- モデル に対し $S_n \rightarrow \frac{(\rho_2 - \rho_1) e^{-\alpha R_n^2}}{\Lambda_n}$ (9)

c- モデル に対し $\rho_n \doteq \frac{1}{2\Lambda_n} (\rho_2 - \rho_1)$ (10)

4 内部境界面上に存在する乱子に作用する力

均一密度 流体中の異った密度の乱子に作用する外力についてはすでに、Tchen³⁾, Vi-Cheng Liu⁴⁾等によつて与えられているが、本文 では鉛直方向に 密度成層を持つ 乱流中の乱子運動 を取扱うため、さらに変動浮力を追加しなければならない。

3) Tchen, C.M. (Turbulence p353 by Hinze, McGraw-Hill)

4) Vi-Cheng Liu, Turbulent dispersion of dynamic particles. Journal of Meteorology vol.13, 1956.

すなわち、乱子の鉛直運動に伴う変動浮力は、以下のようにして求めることができる。

a- モデル に対し、図2の乱子が 微小距離 y だけ 鉛直方向に変動 したときに、発生する浮力は次式で求まる。

$$F' = \rho V \kappa \rho_2 y = \frac{\rho V \kappa \rho_2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(k)}{k} e^{ikt} dk \quad (11)$$

ここに、 t 時間における鉛直方向位置は

$$y = \int_0^t v dt = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(k)}{k} e^{ikt} dk \quad (12)$$

(b) モデル に対して変動浮力は

(c) モデル に対して変動浮力は $F' = \rho V \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\Lambda_n i} e^{-\alpha R_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(k)}{k} e^{ikt} dk$ (13)

$$F' = \frac{3\kappa \rho_2}{2\Lambda_n} V y = \frac{3\kappa \rho_2}{2\Lambda_n} V \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(k)}{k} e^{ikt} dk \quad (14)$$

5 乱子の成層乱流中の運動方程式

乱流中には ρ_n の密度をもち、 λ_n から λ_0 までの乱子が存在し、これがスベクトル関数の示すエネルギーの配分を持ち、かつ、波数もまた k_n から k_0 まで存在し、かつ、エネルギー・スベクトルで示されるような分布を持っている。本題においては、まず境界面上で ρ_0 の密度をもち、 λ_n なる大きさで k_n なる波数を持つ乱子1個を取り上げ、その成層乱流中の運動を追跡する。

求本の乱流中において、内部境界面上に存在する密度 ρ_0 、直径 λ_n 、波数 k_n の乱子等性乱流中の運動のエネルギーすなわち乱子運動の振幅および成層密度流中の乱子運動のエネルギーすなわち、乱子運動の振幅を類推しようとする。

密度 ρ_0 、直径 λ_n 、波数 k_n の乱子が異つた流体中で運動する場合の運動方程式は、Fehen³⁾ K 確い次式のように誘導することができる。

$$(a) \text{ 均一密度流体中の乱子の流速} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i k t} dk \quad (15)$$

$$(b) \text{ 成層乱流中の乱子の流速} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{-\infty}^{\infty} B(k) e^{i k t} dk \quad (16)$$

運動方程式を線型化すれば、単に変動流速の振幅 $A(k)$ と $B(k)$ との関係を求めればよいことになる。

(a) 型密度分布の運動方程式

$$3\rho_0(\dot{v} - \dot{u}) + \frac{36\mu}{\lambda_n} \left[v - u + \frac{\lambda_n}{2(\pi\nu)^{1/2}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{v}(k) - \dot{u}(k)}{(t - \xi)^{1/2}} d\xi \right] - g\rho_0 K y = 0 \quad (17)$$

(b) 型密度分布の運動方程式

$$3\rho_0(\dot{v} - \dot{u}) + \frac{36\mu}{\lambda_n} \left[v - u + \frac{\lambda_n}{2(\pi\nu)^{1/2}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{v}(k) - \dot{u}(k)}{(t - \xi)^{1/2}} d\xi \right] - \frac{g(\rho_2 - \rho_1)e^{-\alpha(\frac{\lambda_n}{2})^2}}{\lambda_n} y = 0 \quad (18)$$

(c) 型密度分布の運動方程式

$$3\rho_0(\dot{v} - \dot{u}) + \frac{36\mu}{\lambda_n} \left[v - u + \frac{\lambda_n}{2(\pi\nu)^{1/2}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{v}(k) - \dot{u}(k)}{(t - \xi)^{1/2}} d\xi \right] - \frac{3(\rho_2 - \rho_1)^2}{2\lambda_n} y = 0 \quad (19)$$

ここに $u, v, \dot{u}, \dot{v}, y$ についてはそれぞれ (15), (16), (12) から誘導された値を使う。

6 乱子の成層乱流における振幅の変化

$$(\text{実数部}) \quad \frac{B(k)}{A(k)} = \frac{R_1 R_2 - I_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2} \quad (20)$$

ここに a 分布の場合

$$R_1 = \frac{36\mu}{\lambda_n \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu}{\lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^2 \quad (21)$$

$$I_1 = \frac{9\mu}{\lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^2 + \frac{3\rho_0 k}{12\pi} \quad (23)$$

$$R_2 = \frac{36\mu}{\lambda_n \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu}{\lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^2 \quad (22)$$

$$I_2 = \frac{9\mu}{\lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^2 + \frac{2K g \rho_0}{k} + \frac{3\rho_0 k}{\sqrt{2\pi}} \quad (24)$$

$$b \text{ 分布の場合} \quad R_1 = \frac{36\mu}{\lambda_n \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^2}{\lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \quad (25)$$

$$I_1 = \frac{9\mu k^2}{\lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_0 k}{12\pi} \quad (27)$$

$$R_2 = \frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$I_2 = \frac{9\mu}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^{\frac{1}{2}} + 2\delta \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{2k} e^{-\alpha(\frac{\Lambda_n}{2})^2} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \quad (28)$$

(c) 分布の場合

$$R_1 = \frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

$$I_1 = \frac{9\mu}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^{\frac{1}{2}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \quad (31)$$

$$R_2 = \frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \quad (30)$$

$$I_2 = \frac{9\mu}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} k^{\frac{1}{2}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)\delta}{\Lambda_n} \quad (32)$$

(7) 乱子分散の発生する限界条件

B(w) = 0 の状態においては、乱子の流運は zero となり、塩分分散はなくなるものと考える。

(a) 分布に対しては

$$K = \frac{k}{2\delta\rho_0} \left\{ \frac{\left(\frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \right)^2}{\left(\frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right)} - \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} - \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (33)$$

(b) 分布に対しては

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)\delta}{2\Lambda_n} e^{-\alpha(\frac{\Lambda_n}{2})^2} = \frac{k}{2\delta\rho_0} \left\{ \frac{\left(\frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \right)^2}{\left(\frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right)} - \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} - \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (34)$$

(c) 分布に対しては

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{2\Lambda_n} = \frac{k}{2\delta\rho_0} \left\{ \frac{\left(\frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \right)^2}{\left(\frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right)} - \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} - \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (35)$$

7 乱子運動のスペクトル的考察

実際の成層乱流中には、乱子エネルギーの分布、各乱子のスケールとスペクトルの分布が略式で与えられるので、乱子運動の特性には、この凡てのスケールとの乱子と、凡ての波数の乱子とが影響している。したがってこれらの凡ての乱子の寄与した結果として、乱子運動を定義することが必要である。

(a) 分布に対して

$$\frac{\overline{B(k)}}{A(k)} = \frac{1}{\Lambda_0 - \Lambda_{\infty}} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda_{\infty}} \left\{ \frac{\left(\frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \right)^2}{\left(\frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right)} - \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} - \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \frac{2}{3} \frac{k^{-\frac{5}{2}}}{k_0^{-\frac{5}{2}} - k_{\infty}^{-\frac{5}{2}}} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Lambda_n^{\frac{5}{2}}}{\Lambda_0^{\frac{5}{2}} - \Lambda_{\infty}^{\frac{5}{2}}} d\Lambda \quad (36)$$

(b) 分布に対して

$$\frac{\overline{B(k)}}{A(k)} = \frac{1}{\Lambda_0 - \Lambda_{\infty}} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda_{\infty}} \left\{ \frac{\left(\frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \right)^2}{\left(\frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right)} - \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} - \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \frac{2}{3} \frac{k^{-\frac{5}{2}}}{k_0^{-\frac{5}{2}} - k_{\infty}^{-\frac{5}{2}}} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Lambda_n^{\frac{5}{2}}}{\Lambda_0^{\frac{5}{2}} - \Lambda_{\infty}^{\frac{5}{2}}} d\Lambda \quad (37)$$

(c) 分布に対して

$$\frac{\overline{B(k)}}{A(k)} = \frac{1}{\Lambda_0 - \Lambda_{\infty}} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda_{\infty}} \left\{ \frac{\left(\frac{36\mu}{\Lambda_n^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} \right)^2}{\left(\frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} + \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right)} - \frac{9\mu k^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_n \sqrt{\pi\nu}} - \frac{3\rho_2 k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \frac{2}{3} \frac{k^{-\frac{5}{2}}}{k_0^{-\frac{5}{2}} - k_{\infty}^{-\frac{5}{2}}} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Lambda_n^{\frac{5}{2}}}{\Lambda_0^{\frac{5}{2}} - \Lambda_{\infty}^{\frac{5}{2}}} d\Lambda \quad (38)$$

(8) 塩分の分散

(a) 分布に対し

$$\overline{C'v} = \frac{\overline{B(k)}}{A(k)} \overline{C'u} \quad (39)$$

(b) 分布に対し

$$\overline{C'v} = \frac{\overline{B(k)}}{A(k)} \overline{C'u} \quad (40)$$

(c) 分布に対し

$$\overline{C'v} = \frac{\overline{B(k)}}{A(k)} \overline{C'u} \quad (41)$$

記号

ρ_0 = 境界面上の乱子の密度

ρ_y = y 点の場の密度

ρ_1 = 表層の密度

ρ_2 = 下層の密度

y = 境界面から上方の高さ

α = 塩分鉛直分布に関する常数

K = 塩分鉛直分布に関する常数

Λ_0 = 最大乱子の直径

Λ_n = 中間乱子の直径

Λ_m = 最小乱子の直径

u = 乱子運動の変動流速

v = 成層乱流中の乱子運動の変動
流速(鉛直)

γ = 1 に近い常数

ν = 水の分子動粘性係数

ε = 消散エネルギー量

k_n = 最大振動数

k = 振動数

$T_n = n$ 乱子の通過時間・周期

U = 平均水平流速

ω = 角速度

L_n = 波長

$F(k)$ = 振動数に対するエネルギー
スペクトル

R_n = 乱子の半径

C = 塩分濃度

$F(k)$ = 乱子直径に対するエネ

ルギー分配率

S_n = 乱子の鉛直密度の配

F' = 乱子に作用する変動
浮力

V = 乱子の体積

$i = \sqrt{-1}$

$B(k)$ = 乱子運動の成層乱流
中振幅

$A(k)$ = 乱子運動の振幅
(波水中)

ξ = パラメータ

C' = 変動塩分濃度