

波による塩淡水の混合について

東京工業大学工学部 椎 貝 博 美
同 河 野 二 夫

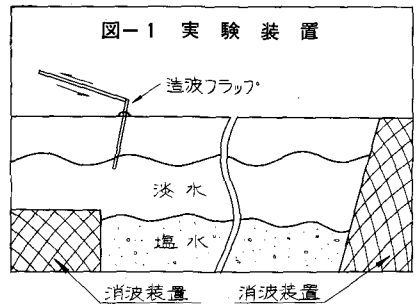
1. 概 説

鉛直方向に密度勾配を有する静止流体に表面波を与えた場合、どのような現象が生ずるか、ということは、現実の問題と離れても、流体力学的にみて興味のある現象である。流体が成層状態にあり、水面に風などによるせん断流が生じている場合には、境界面に内部波が生じ、その砕波によって密度変化が生ずる。このような場合の解析はこれまである程度なされている。ここにのべる場合のように、表面波を与えた場合の混合機構の解析についての研究はまだそれほど進んでいないようである。このような場合に混合の生ずる機構としては、一応次の三つが考えられる。ⅰ) 波動乱流による乱流混合、ⅱ) 波による二次流による混合、ⅲ) 波動による分散 (*dispersion*)、である。まだ他にも、波動によって混合を生ずる理由があるかも知れない。

この論文においてはできるだけ純粋な波動による混合現象についての実験と、その機構についての考察が行なわれているが、将来、できれば逆に混合状態を調べることによって、波による乱れを調べることでできる可能性についても考察してある。

2. 実験の方法

説明の都合上、実験について先にのべる。実験装置の概要は図-1に示す。水路長は11m、巾は0.6mであり、やや波の実験には短い。造波板は図に示すように、なるべく水面のみに波を発生させるようにし、造波板によって直接塩淡水の混合を生じないようにしたが、その効果については多少疑問である。濃度の測定は一度波をとめて、電導度計を用いて行なった。このため、多少とも波をとめたあとの流水の影響が残っているものと思われる。



3. 混合の機構に関する考察

ⅰ) 密度勾配の表面波に対する影響

一般に密度勾配の非常に大きいところ、すなわち境界付近において、波速の遅い内部波が生ずることはよく知られている。二層流においてせん断流水が生じているときの内部波の波速のオーダーは、上層と下層の密度差を $\Delta\rho$ とするとき、 $\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} gh}$ のオーダーである。ここに g は重力の加速度、 h は水深に關係する長さである。これに対し、本研究のように、表面波を与えたときに生ずる内部波はこれよりずっと波速の大きい、すなわち、表面波と同じ程度の波速を有する波である。(このような波を内部波とよぶことが適当であるか、ということについては問題がある) いずれにしても、成層状態にある場合にせん断流水がなければ、従来の成層流の不安定理論による混合の説明は利用できない。そこで密度分布が連続である場合の波動方程式を *Lamb* に従って作ってみる。¹⁾

いま、 ρ_0 をある程度短い時間について平均された密度とする。これは、平均時間より長い時間に対し

ては定常ではないものとする、 $\rho_0 = \rho_0(y, t)$ とかける。ただし、 x は水平方向、 y は鉛直方向の座標をあらわすものとする。圧力 P についても同様に考えて、 $P = P_0 + P'$ 、 $\rho = \rho_0 + \rho'$ とする。この関係を非線型項を省略した運動方程式と連続の方程式(1)~(3)に代入して、(4)~(6)式をえる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ただし、(2)式は濃度連続の条件を用いることにより $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$ とかける。

$\rho'/\rho_0 \ll 1$ 、 $\frac{\partial P_0}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial P_0}{\partial y} + g\rho_0 = 0$ という仮定が許されると次の(3)~(5)式となるのである。

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial x} \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial y} - g\rho' \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + v \frac{\partial P_0}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

偏微分は今後添字によってあらわすこととする。流関数 Ψ を導入し、 ρ' を消去すれば、結局、

$$(\rho_{0y} \Psi_{ty} + \rho_0 \Delta \Psi_t)_t - g\rho_{0y} \Psi_{xx} = 0 \quad (7)$$

がえられる。ただし、 $u = -\Psi_y$ 、 $v = \Psi_x$ 、 Δ : ラプラシアン である。特に ρ_0 が時間的に変化しない場合には $\rho_{0t} = 0$ とおいて、

$$\Delta \Psi_{tt} + \frac{\rho_{0y}}{\rho_0} [\Psi_{tty} - g\Psi_{txx}] = 0 \quad (8)$$

がえられる。これは文献1にてでている結果と一致するので、(7)式は単に(8)を非定常化したものといえる。又、水面では $\frac{DP}{Dt} = 0$ という条件から、

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = -v \frac{\partial P_0}{\partial y} = g\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9)$$

がえられ、(5)式と組み合わせられて

$$\Psi_{tty} = g\Psi_{xx} \quad (10)$$

がえられる。今、 $\Psi \sim e^{i(\sigma t - kx)}$ (σ, k : 一定) と仮定すると、(8)式は

$$(\sigma^2 \Psi_y - gk^2 \Psi) \rho_{0y} + \sigma^2 \rho_0 (\Psi_{yy} - k^2 \Psi) = 0 \quad (11)$$

となる。ゆえにもし、 $\Psi \sim e^{ky}$ という形式をしており、 $\sigma = \sqrt{gk}$ という関係にあれば、(10)も(11)も満足される。このことは、必ずしも必要十分条件とはいえないが、次のような推測を可能にするものである。すなわち、密度勾配が存在しても、通常の表面波を与えた場合には波としての運動はほとんど影響を与えられないということである。このことはわれわれの実験については確かに成立しており、密度勾配のために波が影

響を受けている様子はみとめられていない。

そこで、平均密度 ρ_0 の時間的変化を追求するためには、(7)式に適当な ψ を与えて計算することが考えられる。しかし、(7)式の物理的意味が今のところ不明であるので、現段階においては次のような考え方をとってみた。

ii) リチャードソン数について

リチャードソン数、 R_i は、通常次式で定義されている。

$$R_i = \frac{\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}}{(\frac{\partial u}{\partial y})^2} = \frac{K_m}{K_\rho} \quad (12)$$

ここに、 K_ρ は密度の拡散係数であり、 K_m は運動量の拡散係数である²⁾。又、 y を鉛直上向きにとるときは、(12)にマイナスをつけることも多い。もし、何らかの原因で混合が生じ、これが運動と密接な関係にあるものとし、混合が定常状態に達するとすれば、 K_m/K_ρ の値は一定に近づく可能性がある。そこで、(12)式において、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ は波動から計算し、 R_i は一定とすれば、そのような場合の密度分布が求められるはずである。(もっとも、このやり方には問題がある。(12)の $\frac{\partial u}{\partial y}$ はせん断流をあらわすのが本場で、波の場合はせん断流ではない。一応、ここでは、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ が乱れに関係している要素をもっているとしている)

今、 $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ とする。ここでは ρ_0 は純粋な水の密度である。波の流関数から、

$$u = \frac{H\pi}{T} \frac{\cosh k(h-y)}{\sinh kh} \sin \sigma t \quad (13)$$

h : 水深、 H : 波高、 T : 周期、であり、 y 軸は水面を 0 として鉛直下向きにとる。(12)に(13)を代入すれば、

$$\frac{\Delta\rho - \Delta\rho_2}{\rho_0} = KR_i \{ \sinh \xi - \xi \} \quad (14)$$

という簡単な形の密度分布がえられる。ここに $\Delta\rho_2 : y = h$ の密度の変化部分であり、

$$K = - \frac{\pi^3 L}{4gT^2} \left(\frac{H}{L} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sinh^2 kh}, \quad \xi = 2kh \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (15)$$

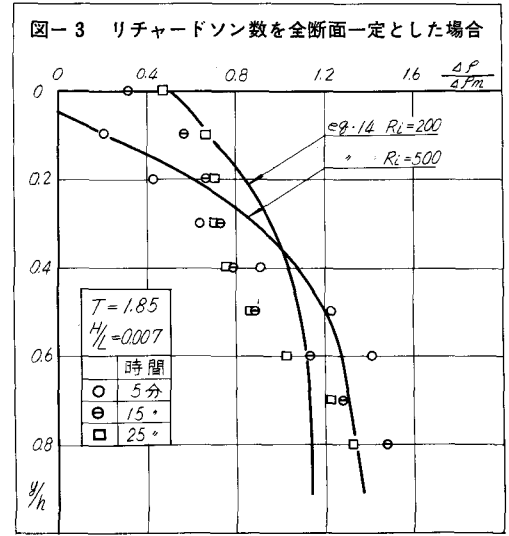
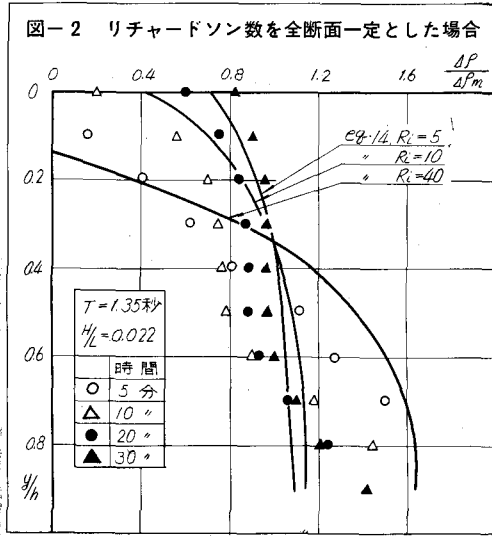
である。(15)式中で、 L は波長、 $k = 2\pi/L$ である。又、 $\Delta\rho_2$ については、全断面について平均した $\Delta\rho$ を $\Delta\rho_m$ とかくとき、矩形水路については、

$$h \Delta\rho_m = \int_0^h \Delta\rho dy \quad (16)$$

という関係があるので、(14)を(16)に代入して計算すると、 $\Delta\rho_m$ を用いて、

$$\frac{\Delta\rho_2}{\rho_0} = \frac{\Delta\rho_m}{\rho_0} + KR_i \left[\frac{1}{2kh} (1 - \cosh 2kh) + kh \right] \quad (17)$$

とかける。(14)式による密度分布の計算値と実測値の二、三例を示すと図 2、3 のようになる。ただし、この計算においては R_i は全断面について、一定とし、時刻によって変化するものと考えている。これは、ある程度時間が経過して、最初の密度分布の影響が消えれば、(12)の K_ρ/K_m が一定に近づくかも知れない、ということを考えているのである。



上の図をみると、 $t = 0$ においてかなり顕著な密度勾配が存在していたために、その影響がなかなか消えないことがわかる。実際、リチャードソン数というのは、静止流体中に密度勾配が存在すれば、 ∞ となり、逆に $\frac{\partial u}{\partial y}$ のある homogeneous な流体中においてはいたる所、0となるものである。従って今の場合には R_i が ∞ から減少してくるわけであるから、全体に一樣な R_i 数を得るには時間がかかることがわかる。そこで次に通常乱れの程度をあらわす量とされているレイノルズ数を適当に定義して、波の影響の及ぶ深さを調べてみることにする。

iii) レイノルズ数について

レイノルズ数を、次のように定義してみる。

$$Re_H = \frac{\hat{u} D}{\nu}, \quad Re_v = \frac{\hat{v} d}{\nu} \quad (18)$$

ここに、 $\hat{u}$, $\hat{v}$: 任意の水深の u 又は v の最大値, D , d : 水粒子軌道の長軸又は短軸の長さ, ν : 動粘性係数である。ゆえに(18)は

$$Re_H = \frac{H^2 \pi \cos h^2 k (h-y)}{\nu T (\sin h k h)^2}, \quad Re_v = \frac{H^2 \pi \sin h^2 k (h-y)}{\nu T (\sin h k h)^2} \quad (19)$$

とかける。ところみに $y = h$ とおくと、 $Re_H = \frac{H^2 T}{\nu T} \left(\frac{1}{(\sin h k h)^2} \right)$ となり、これは、これまで、底の境界層について用いられてきた梶浦らの値の自乗に均しい³⁾ Re が濃度分布に影響を与えなくなるような限界値を Rec とする。(実は、これによって波の乱れを調べたいわけであるが、まだそこまで研究が進まない) 実験によって Rec の値を求めると、

$$Rec \approx 50$$

となる。従来値は、 $Re_{HC} = 25600$ である。なお Rec の値は ρ_{0y} の値が大きい所の深さによって定めた。

そこで、 Re が Rec となる水深を y_c とすれば、 $y < y_c$ では、乱れが発達し、 $y > y_c$ では乱れがそれほ

ど発達していないと考えてもそれほど無理はないものと思われる。

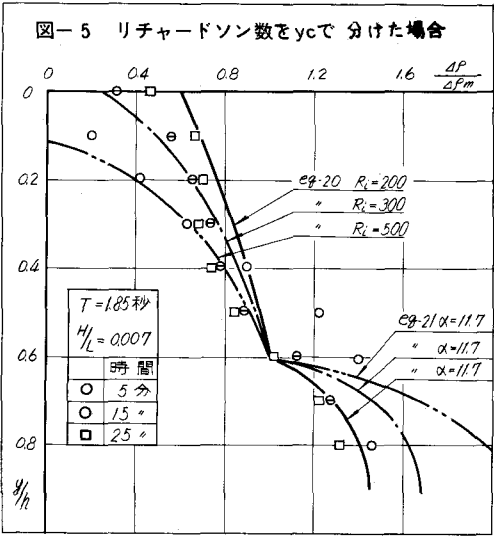
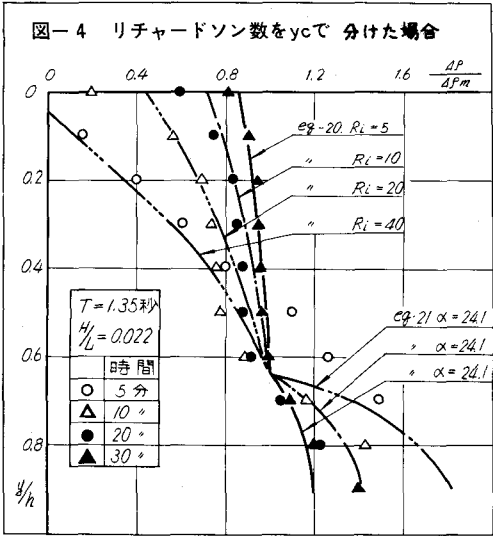
Ⅳ) R_{ec} の影響について

前節でのべたように $y = y_c$ を境にして現象が二分されるのではないかということが一応考えられる。そこで、ⅱ) にのべたと同じ解析を行なってみる。ただし、 R_i の値は、 $y = y_c$ を境として二種類と分けられるものとする。このとき、 $y = y_c$ において ρ が連続である条件を用いるものとする。しかるときは密度分布式として次式をえる。

$$y < y_c \quad \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_m} = 1 + \frac{K R_{i1}}{\Delta \rho_m} \{ (\sin h \ 2k(h-y) - \sin h \ 2k(h-y_c) + 2k(y-y_c) \} \quad (20)$$

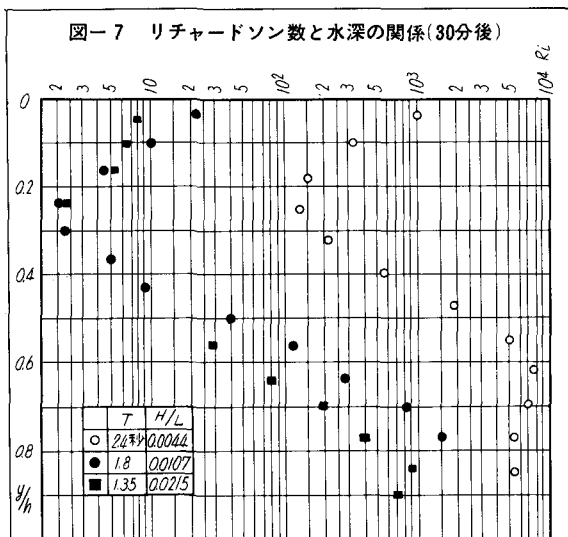
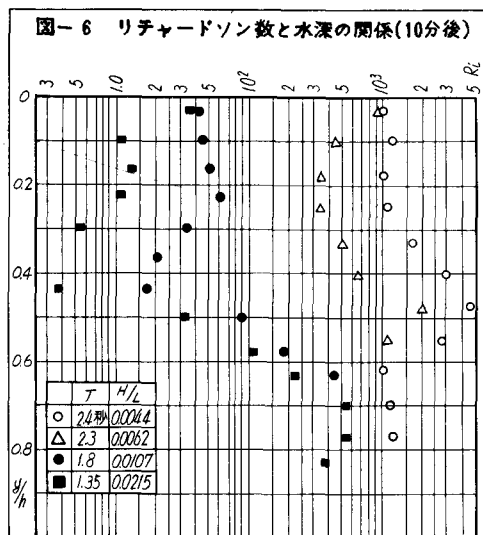
$$y > y_c \quad \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_m} = 1 + \frac{K R_{i1}}{k \cdot \Delta \rho_m (h-y_c)} \{ y_c k \sin h \ 2k(h-y_c) + (1-\alpha) \sin h^2 k(h-y_c) - \sin h^2 kh - k^2 y_c^2 + \alpha k^2 (h-y_c)^2 \} + \frac{K R_{i2}}{\Delta \rho_m} \alpha \{ \sin h \ 2k(h-y) - 2k(h-y) \} \quad (21)$$

ここに、 $\alpha = \frac{R_{i2}}{R_{i1}}$ ， R_{i1} は $y < y_c$ における、又 R_{i2} は $y > y_c$ における R_i の値である。これらの計算結果と実測値の比較の例を図示すると図-4～図-5のようになる。図からわかるように計算値はある程度実測値と似た傾向を示す。しかし、ある程度時間が経過して密度分布に関する初期条件の影響が薄れてきても、必ずしも実測値と計算値が一致するわけではない。このことは、少なくとも実測に要した時間内においては R_i = 一定になっていない場合のあることを示している。これについては今後検討を要する。



v) R_i の逆算

ところで、一般には R_i を実測値より逆算することが広く行なわれている。これは、いわば拡散係数を逆算するようなもので、物理的意味について見通しの立たない場合が多い。しかしここでは、少なくとも、 R_i が $y = y_c$ を境にして一定値となっているかどうかということのチェックには役立つはずである。しかし、主として微係数の値を用いるわけであるから、測定誤差が大きく入りこむことが予想される。 R_i のうちの $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ には実測値を用い、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ には波動としての計算値を用いて、 R_i の値を逆算した結果の例は図-6～図-7に示す。図から明らかなように R_i の実測値は全体としては一定となっていない。しかし、層別に一定となっている傾向は多少みとめられる。



4. 結 語

これまでの結果を要約すると次の通りである。

- i) 密度勾配は表面波に対してはそれほど影響しないが、密度勾配は表面波によって大きな影響を受け、混合が生ずる。
- ii) 適当に Re を定義すると、ある Re の値のところで、混合現象は二つに分かれる。
- iii) この場合、 R_i の値は、 Re の限界値を境にして二種の値に分かれる。しかし、これは時間的に変化する。
- iv) その他、今後考察すべき問題は多くある。

なお、本研究は文部省特定研究、河川構造物の機能、の援助を受けた。深い耐意を表する次第である。本実験にあたり土木工学科四年沢本正樹君の助力を得た。

5. 参考文献

1. Lamb, H. : *Hydrodynamics* 4th. ed. p.378.
2. 谷：乱流理論, 3. 堀川・渡辺：波による砂移動に関する一考察。第13回海岸講演論文集
4. 椎貝・河野：第3回災害科学総合シンポジウム論文集 1966。