

# 開水路流れの自由表面上における固体粒子の拡散特性について

京都大学工学部 正会員 岩佐 義朗  
京都大学工学部 正会員 今本 博健  
京都大学大学院 学生員 井上 和也  
京都大学大学院 学生員 白砂 孝夫

## 1. 序 言

乱流拡散現象は乱流場と拡散物質との相互作用にもとづく相対的な現象であるから、粒子トレーサーによる乱流拡散実験においては、粒子の形状、大きさ、比重などによって測定される拡散過程は異なってくる。粒子の大きさの拡散過程に及ぼす影響については、これまでも多くの研究者によって取り扱われており、実際現象においてもしばしば観測されている。しかしながら、従来の研究においては、この問題を主として定性的に取り扱っており、その定性的特性についてはある程度説明づけられるようになっているが、定量的に論ぜられるまでには至っていないようである。

粒子の大きさの拡散過程に及ぼす影響についての従来の取り扱い方法は、つぎの2種の方法に大別される。すなわち、

- (1) 粒子による乱れスペクトルの切断あるいは平均化（フィルター効果）による方法
- (2) 粒子運動に対する運動方程式による方法

である。(1)の方法は、乱流場における粒子が一種の乱れ計測器のような役割をするという考えにもとづき、乱れ計測における計測器の慣性の効果に関する理論を適用し、乱れスペクトルが粒子によって切断あるいは平均化される、すなわち、粒子は一種のフィルターの役割をするというものである。(2)の方法は、Bassetなどによって導かれた粘性流体中の粒子運動に対する運動方程式による方法であるが、粒子に作用する流体力に関し不明の点が多く、また、乱流場のような不規則変動場において、種々の初期条件および境界条件に対する運動方程式の解を求めることはほとんど不可能であるため、実用上の問題においては適用できない場合が多い。

本研究は、(1)の方法を用いて、“粒子速度は流体粒子速度の体積平均によって与えられる”という仮定を基礎として、若干の理論的考察をするとともに、種々の大きさの円柱形固体粒子を用いて開水路流れの自由表面上における乱流拡散現象を実測し、実用上の取り扱いにおける粒径の効果の定量的評価について明らかにしようとするものである。

## 2. 固体粒子の乱流拡散過程

等方性一様乱流場における流体粒子 (fluid particle) の拡散過程については、すでにTaylor<sup>1)</sup>に始まる統計論的取り扱いによりLagrange相関係数が導入され、実際現象の拡散過程をよく説明できることは、従来の多くの研究者によって確かめられている。以下に簡単にその結果を示す。

簡単のため、1次元の取り扱いをすると、 $t$ 時間後における分散 $\sigma^2(t)$ は、

$$\sigma^2(t) = \int_0^t \int_0^t \overline{u(t_1) u(t_2)} dt_1 dt_2 = 2\bar{u}^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t-t_1} R(\xi) d\xi = 2\bar{u}^2 \int_0^t (t-\xi) R(\xi) d\xi \quad (1)$$

と表わされる。ここに、 $R(\xi)$ は時間的にどれだけ離れた乱れ速度間のLagrangeの相関係数であって、

$$R(\xi) = \frac{\overline{u(t) u(t+\xi)}}{\overline{u^2}} \quad (2)$$

によって定義される。Einstein<sup>2)</sup>の拡散理論によると、分散 $\sigma^2(t)$ と拡散係数 $D(t)$ との間には、

$$D(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t)}{dt} \quad (3)$$

の関係が成立するから、結局、 $\sigma^2(t)$ 、 $D(t)$ 、 $R(\xi)$ の間にはつぎの関係式が成立する。

$$\sigma^2(t) = 2 \int_0^t D(t_0) dt_0, \quad D(t) = \int_0^t \overline{u(t_0) u(t_0+\xi)} d\xi = \overline{u^2} \int_0^t R(\xi) d\xi \quad (4)$$

以上の理論は流体粒子の拡散過程に対して適用されるものであって、流体粒子に比してその大きさを見捨てできない粒子(discrete particle)の拡散過程に対しては、以上の理論における流体粒子速度 $u$ を粒子速度 $u_p$ に置きかえなければならず、したがって、Lagrange相関係数の特性も当然変化する。以下においては、このような粒子の大きさを考慮した場合の拡散過程について考察する(流体粒子に対する量と区別するため、粒子に対する量には添字 $p$ をつける)。

いま、粒子速度 $u_p$ は、流体粒子速度 $u$ の粒子の大きさに関する体積平均によって与えられると仮定すると、時刻 $t$ における粒子速度 $u_p(t)$ は、

$$u_p(t) = \frac{1}{V} \int_V u(t) dv \quad (v: \text{体積}) \quad (5)$$

となる。さらに、この体積平均をつぎのように時間平均によって置きかえられるものとする、

$$u_p(t) = \frac{1}{S} \int_t^{t+S} u(t_0) dt_0 \quad (6)$$

が得られる。ここに、 $S$ は流体粒子が対象としている大きさをもった粒子の内部を通過するに要する時間であって、近似的には、平均流速を $U$ とすると、 $S = d/U$ ( $d$ : 粒径)によって与えられる。

(6)式を用いると、粒子速度間のLagrange相関関数 $\overline{u_p(t) u_p(t+\xi)}$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \overline{u_p(t) u_p(t+\xi)} &= \left( \frac{1}{S} \int_t^{t+S} u dt \right) \left( \frac{1}{S} \int_{t+\xi}^{t+\xi+S} u dt \right) \\ &= \frac{\overline{u^2}}{S^2} \left\{ \int_{\xi-S}^{\xi} (\eta - \xi + S) R(\eta) d\eta + \int_{\xi}^{\xi+S} (-\eta + \xi + S) R(\eta) d\eta \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

したがって、粒子拡散係数 $D_p(t)$ 、すなわち、

$$D_p(t) = \int_0^t \overline{u_p(t_0) u_p(t_0+\xi)} d\xi = \overline{u_p^2} \int_0^t R_p(\xi) d\xi \quad (8)$$

は、(7)式によってつぎのように計算される。

1)  $0 \leq t \leq S/2$  のとき

$$\begin{aligned} D_p(t) &= \frac{\overline{u^2}}{S^2} \left[ \int_0^t \{ \alpha_2(-\eta) + \alpha_3(\eta) + \alpha_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{S-t} \{ \alpha_2(-\eta) + \alpha_5(\eta) \} R(\eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{S-t}^S \{ \alpha_1(-\eta) + \alpha_6(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_S^{t+S} \alpha_6(\eta) R(\eta) d\eta \right] \end{aligned}$$

ii)  $s/2 \leq t \leq s$  のとき

$$D_p(t) = \frac{\overline{u^2}}{s^2} \left[ \int_0^{s-t} \{ \alpha_2(-\eta) + \alpha_3(\eta) + \alpha_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_{s-t}^t \{ \alpha_1(-\eta) + \alpha_3(\eta) + \alpha_4(\eta) \} R(\eta) d\eta \right. \\ \left. + \int_0^t \{ \alpha_1(-\eta) + \alpha_6(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_s^{t+s} \alpha_5(\eta) R(\eta) d\eta \right]$$

iii)  $s \leq t \leq 2s$  のとき

$$D_p(t) = \frac{\overline{u^2}}{s^2} \left[ \int_0^{t-s} \{ \beta_1(-\eta) + \beta_2(\eta) + \beta_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_{t-s}^s \{ \beta_1(-\eta) + \beta_3(\eta) + \beta_4(\eta) \} R(\eta) d\eta \right. \\ \left. + \int_s^t \{ \beta_3(\eta) + \beta_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{t+s} \beta_6(\eta) R(\eta) d\eta \right]$$

iv)  $t \geq 2s$  のとき

$$D_p(t) = \frac{\overline{u^2}}{s^2} \left[ \int_0^s \{ \beta_1(-\eta) + \beta_2(\eta) + \beta_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{t-s} \{ \beta_2(\eta) + \beta_5(\eta) \} R(\eta) d\eta \right. \\ \left. + \int_{t-s}^t \{ \beta_3(\eta) + \beta_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{t+s} \beta_6(\eta) R(\eta) d\eta \right] \quad (9)$$

ここに、 $\alpha_i$  および  $\beta_i$  は次式によって表わされるものである。

$$\begin{aligned} \alpha_1(\eta) &= \frac{(\eta+s)^2}{2} & \alpha_2(\eta) &= t(\eta - \frac{t}{2} + s) & \alpha_3(\eta) &= t(\eta - \frac{t}{2} + s) - \eta(\frac{\eta}{2} + s) \\ \alpha_4(\eta) &= \eta(-\frac{\eta}{2} + s) & \alpha_5(\eta) &= t(-\eta + \frac{t}{2} + s) & \alpha_6(\eta) &= t(-\eta + \frac{t}{2} + s) + \frac{(\eta-s)^2}{2} \\ \beta_1(\eta) &= \frac{(\eta+s)^2}{2} & \beta_2(\eta) &= \frac{s^2}{2} & \beta_3(\eta) &= t(\eta - \frac{t}{2} + s) - \eta(\frac{\eta}{2} + s) \\ \beta_4(\eta) &= \eta(-\frac{\eta}{2} + s) & \beta_5(\eta) &= \frac{s^2}{2} & \beta_6(\eta) &= t(-\eta + \frac{t}{2} + s) + \frac{(\eta-s)^2}{2} \end{aligned}$$

これらの値を用いて、(9)式のIVを計算すると、

$$D_p(t) = \overline{u^2} \int_0^t R(\eta) d\eta + \frac{\overline{u^2}}{s^2} \left[ \int_{t-s}^t \left\{ t(\eta - \frac{\eta}{2} + s) - \eta(\frac{\eta}{2} + s) + \frac{s^2}{2} \right\} R(\eta) d\eta \right. \\ \left. + \int_s^{t+s} \left\{ t(-\eta + \frac{t}{2} + s) + \frac{(\eta-s)^2}{2} \right\} R(\eta) d\eta \right] \quad (10)$$

となるから、 $t \rightarrow \infty$  とすると、右辺の第2項は第1項に比し無視できるから、

$$D_p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_p(t) = \overline{u^2} \int_0^\infty R(\eta) d\eta = D(\infty) \quad (11)$$

となり、 $t$  がきわめて大きい場合、粒子の拡散係数は流体粒子のそれに等しくなることがわかる。

また、(7)式において、 $\xi = 0$  とおくと、

$$\overline{u_p^2} = \frac{\overline{u^2}}{s^2} \left\{ \int_{-s}^0 (\eta+s) R(\eta) d\eta + \int_0^s (-\eta+s) R(\eta) d\eta \right\} = \frac{2\overline{u^2}}{s^2} \int_0^s (-\eta+s) R(\eta) d\eta \quad (12)$$

となり、 $R(\xi)$  が与えられると、 $\overline{u^2}$  と  $\overline{u_p^2}$  との関係が明らかになる。

$R(\xi)$  の関数形については、現在まだ明らかにされていないが、いま、 $R(\xi)$  として、従来よりよく用いられているつぎの関数形、すなわち、

$$R(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{\lambda^2} \quad \text{for small } t, \quad R(\xi) = \exp(-\frac{t}{t_*}) \quad \text{for large } t \quad (13)$$

を用いると、 $\overline{u_p^2}$  はつぎのようになる。

$$\frac{\overline{u^2}}{\overline{u_p^2}} = 1 - \frac{s^2}{6\lambda^2} \quad \text{for small } t, \quad \frac{\overline{u_p^2}}{\overline{u^2}} = \frac{2t_*}{s^2} \left( \frac{s}{t_*} + e^{-\frac{s}{t_*}} - 1 \right) \quad \text{for large } t \quad (14)$$

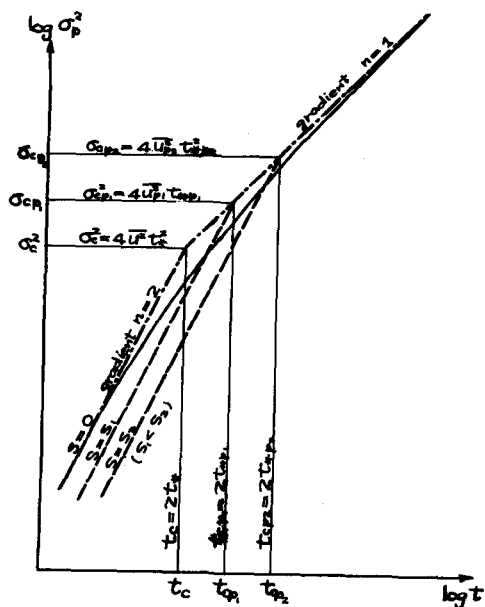


図 - 1

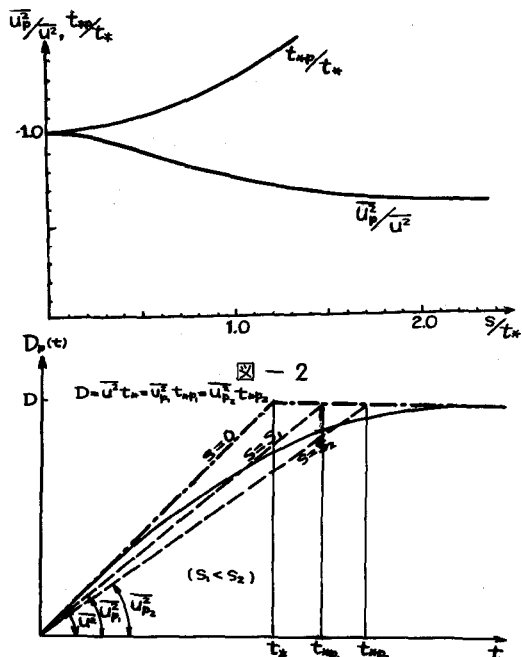


図 - 3

以上の理論は相当複雑であるため、拡散時間  $t$  のきわめて小さい場合（第Ⅰ領域）ならびに大きい場合（第Ⅱ領域）の両極限の領域における拡散過程特性によって、全体の拡散過程を単純化し、この単純化された拡散過程によって粒径の効果に関する考察を行なう。すなわち、図-1 および 2 に示されるように、実線で示された実際の流体粒子の拡散過程を、拡散特性時間  $t_*$  によって 2 つの領域にわけ、鎖線で示されるように単純化する。この場合、 $R(t)$ 、 $D(t)$ 、 $\sigma^2(t)$  はつぎのように表わされる。ただし、図-1 の  $\sigma^2(t)$  については、両対数紙上で単純化しているため、特性時間  $t_c$  として、 $t_c = 2t_*$  となっている。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t \leq t_* \quad \text{のとき} \quad & R(t) = 1, \quad D(t) = \overline{u^2} t, \quad \sigma^2(t) = \overline{u^2} t^2 \\ t \geq t_* \quad \text{のとき} \quad & R(t) = 0, \quad D(t) = \overline{u^2} t_*, \quad \sigma^2(t) = 2\overline{u^2} t_*^2 \left( \frac{t}{t_*} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

この方法を粒子拡散に適用する場合、(15)式において、 $\overline{u^2}$  および  $t_*$  を、それぞれ、 $\overline{u_p^2}$  および  $t_{*p}$  に置きかえればよい。したがって、この変換関係が明らかになれば、流体粒子の拡散過程より、粒子拡散過程を知ることができる。 $\overline{u^2}$  と  $\overline{u_p^2}$  との関係は、(12)式によって与えられる。また、 $t_*$  と  $t_{*p}$  との関係は、拡散時間がきわめて大きい場合、拡散係数は粒径に関係しないという(11)式の結果を用いると、

$$D(\infty) = \overline{u^2} t_* = D_p(\infty) = \overline{u_p^2} t_{*p}, \quad \text{すなわち,} \quad t_{*p} = \frac{\overline{u^2}}{\overline{u_p^2}} t_* \quad (16)$$

という関係が(15)式より得られる。

(14), (15), (16)式によって、流体粒子と粒子との拡散過程の比較が可能となる。図-1, 2, 3 は、こ

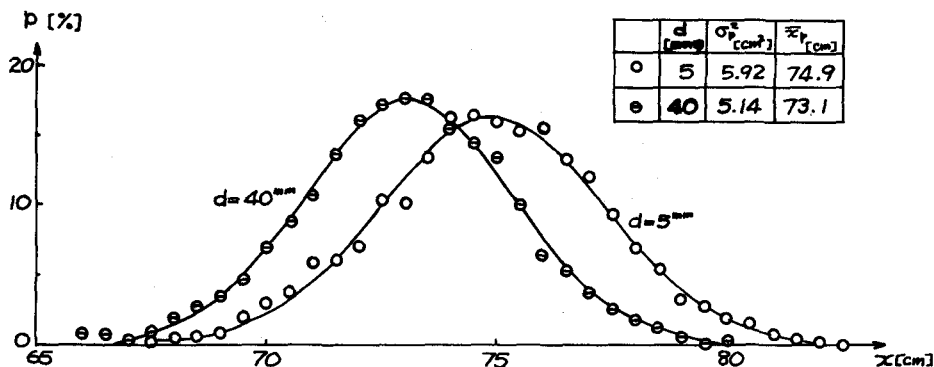


図 - 4

これらの結果を示したものであって、図-3は、Lagrange相関係数として、(13)式の指数関数形を用いて、 $\overline{u_p^2}/\bar{u}^2$  および  $t_{0p}/t_*$  と  $S/t_*$  との関係を計算した結果である。図-1および2の破線は、図-3の結果を用いて、拡散係数および分散における粒径の効果を示したものであって、 $S=0$  は流体粒子に対応する。

### 3. 長方形断面一様水路における拡散実験

実験装置は既報<sup>4)</sup>のものと同様であるので省略する。実験方法を簡単に説明するとつぎの通りである。自由表面上に、直径5, 10, 20, 40mmの4種の発泡ポリエチレン製円板粒子を浮流させ、その軌跡をストロボ撮影し、航空写真解析用読み取り装置によって、粒子位置(x, y)を読み取り、100個の粒子軌跡より、電子計算機KDC-IIによって、拡散時間  $t = 0.05$  sec ことの分散、拡散係

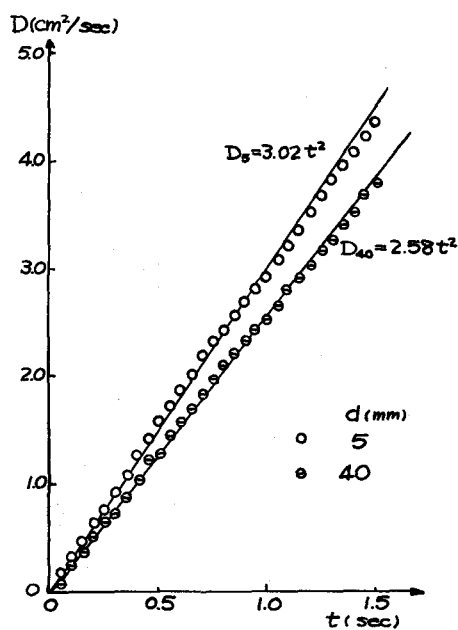


図 - 5

数を計算した。実験結果の一例として、流量  $Q = 15.9 \text{ l/sec}$  における結果を図-4, 5に示す。図-4は、粒径  $D = 5$  および  $40 \text{ mm}$  の  $t = 1.0 \text{ sec}$  における粒子位置の確率分布を示したものであるが、粒径が大きいものほど、分散が小さくなっていることがわかる。なお、この図では、粒径が異なると、位置の平均値  $\bar{x}$  も異なっているが、このような現象は2.の理論考察では説明できず、今後の研究課題としたい。図-5は、拡散係数における粒径の効果を示したものであるが、本実験では測定拡散時間が短いため、第2領域の拡散過程をとらえるに至っていないことがわかる。粒径の効果については、図-2と比較すれば明らかなように、2.の考察とよく一致している。

### 4. 結 言

本研究は、粒子拡散現象における粒径の効果を、\*粒子速度は流体粒子速度の体積平均によって与えられる\*という仮定にもとずき理論的に検討するとともに、固体粒子(発泡ポリエチレン製円板粒

子)を用いて、開水路流れの自由表面上における拡散実験を行ない、拡散過程に及ぼす粒径の効果について検討したものである。本研究による結果を要約するとつぎの通りである。

- (1) 拡散過程について：流体粒子拡散においては、拡散時間のきわめて小さい場合、および大きい場合における拡散特性によって、全体の拡散過程を単純化すると、乱れの大きさ $\overline{u^2}$ および拡散特性時間 $t_*$ の2種の特性量より、拡散過程の概要を知ることができるが、粒子拡散においては、これらの特性量を粒子拡散における特性量 $\overline{u_p^2}$ および $t_{*p}$ に置きかえればよい。
- (2) 粒子拡散特性量 $\overline{u_p^2}$ および $t_{*p}$ について： $\overline{u_p^2}$ と $\overline{u^2}$ 、および $t_{*p}$ と $t_*$ との関係については、(1)および(2)式によって与えられる。これらの式によると、粒径が大きくなるにしたがい、 $\overline{u_p^2}/\overline{u^2}$ は減少し、 $t_{*p}/t_*$ は増加することがわかる。したがって、分散が拡散時間の2乗に比例する第Ⅰ領域においては、分散および拡散係数は粒径が大きくなるにしたがい減少する。しかしながら、拡散時間がきわめて大きい場合、(2)式より明らかなように、粒子拡散係数は流体粒子拡散係数にほぼ等しくなるため、分散は流体粒子の場合に比し小さくはなるが、その比 $\sigma_p^2/\sigma^2$ は1に近づく。
- (3) 本実験では、測定拡散時間が短かすぎたため、第Ⅱ領域を把握することができなかったが、第Ⅰ領域では、理論的考察と一致した傾向を実測することができた。しかしながら、定量的検討を行なうまでには至らなかった。

拡散現象における粒径の効果を明らかにするためには、現象を3次的に取り扱うとともに、粒子運動と流体運動との相互作用を解明しなければならない。しかしながら、現段階においては、これらの問題の理論的解明はきわめて困難であるため、粒子運動の統計的諸特性を実験的に把握することがこの問題解明の第1条件となるが、今後においては、実験方法ならびに解析方法をさらに改良し、測定精度を高めるとともに、より多くの水理条件のもとでの実験を行ない、この問題の究明に努める予定である。

## 参 考 文 献

- 1) Taylor, G. I.: Diffusion by Continuous Movements, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 20, 1921
- 2) Einstein, A.: Über die von der Molekulav-kinetischen Theorie der Wärme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten Suspendierten Teilchen, Ann, Physik, 17, 1905.
- 3) Iwasa, Y., H. Imamoto: Some Features of Turbulent Diffusive Processes in Open Channel Flows, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ., 28, Part 1, 1966.
- 4) 岩佐義明・今本博健：開水路せん断乱流場における拡散現象について，第10回水理講演会講演概要，土木学会水理委員会，昭41.